

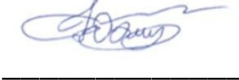
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД
«ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА»

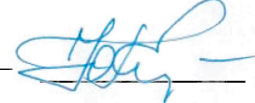
Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій
Кафедра математики та інформатики

Шевченко Марія Сергіївна
МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕТВОРЕНЬ

кваліфікаційна робота
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня
за спеціальністю 014.04 «Середня освіта (математика)»

Особистий підпис –  Марія ШЕВЧЕНКО

Науковий керівник –  професор кафедри математики та
інформатики, доктор фізико-
математичних наук, професор
Юрій ЖУЧОК

В. о. завідувача кафедри –  професор кафедри математики та
інформатики, доктор технічних
наук, доцент Юрій КОЗУБ

Зміст

Вступ	3
Розділ 1. Основні поняття теорії графів	5
1.1. Графи та їх види	5
1.2. Операції на графах	8
1.3. Ендоморфізми та автоморфізми графів	12
Висновки до розділу 1	17
Розділ 2. Формула для числа слабких ендоморфізмів на шляхах	18
2.1. Поняття слабого ендоморфізму	18
2.2. Кількість слабких ендоморфізмів на шляхах	20
2.3. Ескізне розширення до гомоморфізмів з контурів	26
2.4. Ранг ендоморфізму поліноміальної алгебри	28
2.5. Квазівнутрішні ендоморфізми	36
Висновки до розділу 2	39
Розділ 3. Ендотипи графів	40
3.1. Поняття ендотипу	40
3.2. Ендотипи $(n - 3)$ -регулярних графів порядку n	42
3.3. Ендотипи відношень еквівалентності	47
Висновки до розділу 3	57
Висновки	58
Список літератури.....	59
Додатки.....	62

Вступ

Актуальність теми. Дослідження графів за допомогою перетворень є досить актуальним напрямком в сучасній алгебрі. Перетворення графів – це процес переведення початкового графа в інший граф шляхом здійснення різних операцій. Методи перетворень мають багато застосувань в різних галузях науки. Перетворення графів допомагають відобразити складні зв'язки між даними в зрозумілому та доступному для аналізу вигляді. Це дозволяє відкривати нові закономірності та взаємозв'язки, які можуть бути недостатньо очевидними в початкових даних. Перетворення графів використовуються в розробці алгоритмів для розв'язання таких задач, як пошук найкоротшого шляху, маршрутизація в мережах, вирішення задачі комівояжера тощо. Вивчення цих методів дозволяє розробляти більш ефективні та швидкі алгоритми. Вивчення ендотипів графів може мати практичне застосування в теорії мереж, криптографії, оптимізації, соціальних мережах. Отже, вивчення різних методів дослідження графів за допомогою перетворень є дійсно важливою та актуальною проблемою в теорії графів.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дослідження є вивчення графів за допомогою різних типів перетворень, що зберігають відношення суміжності вершин графів.

Основними завданнями дослідження є:

- описати найуживаніші види графів та операції на них;
- навести приклади класифікації графів;
- дослідити формулу кількості всіх слабких ендоморфізмів на шляхах;
- розглянути властивості рангу ендоморфізму;
- вивчити можливі ендотипи графів еквівалентностей.

Об'єктом дослідження є графи та операції над ними.

Предметом дослідження є методи вивчення графів за допомогою властивостей різних типів ендоморфізмів.

Методи дослідження – загально-алгебраїчні з використанням методів теорії графів та теорії напівгруп.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота пов'язана зі спецкурсом з теорії графів.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Результати магістерської роботи можуть бути використані при викладанні спецкурсів з теорії графів та теорії напівгруп.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури та додатків.

У першому розділі роботи увага приділена різним видам графів [9-10], операціям на графах [9], автоморфізмам та ендоморфізмам графів [8].

Другий розділ присвячений дослідженню слабких ендоморфізмів на довільних шляхах. В скінченному випадку вираховується кількість слабких ендоморфізмів на шляхах та ескізне розширення до гомоморфізмів з контурів [5].

Останній третій розділ присвячений дослідженню ендотипів графів, а саме: ендотипам регулярних графів степеня $(n-3)$ [4] та ендотипам відношень еквівалентності [3, 6].

Апробація результатів магістерської роботи. Результати магістерського дослідження було оприлюднено на таких конференціях:

- Наукова студентська конференція «Дні науки» НН ІФМІТ ЛНУ імені Тараса Шевченка (м. Миргород, травень 2023р.);
- IV Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених (СумДПУ ім.А.С.Макаренка, листопад 2023р.).

Розділ 1. Основні поняття теорії графів

1.1. Графи та їх види

Граф – це абстрактна математична структура, яка представляється множиною вершин та множиною ребер, які з'єднують вершини. Графи використовуються для моделювання зв'язків між об'єктами або ситуаціями.

Існують різні види графів. Основні з них:

Неорієнтований граф – це граф, в якому ребра не мають напрямку. Тобто, якщо між вершинами А та В існує ребро, то існує й ребро між вершинами В та А.

Орієнтований граф – це граф, в якому ребра мають напрямок. Тобто, якщо між вершинами А та В існує ребро, це не означає, що існує ребро між вершинами В та А.

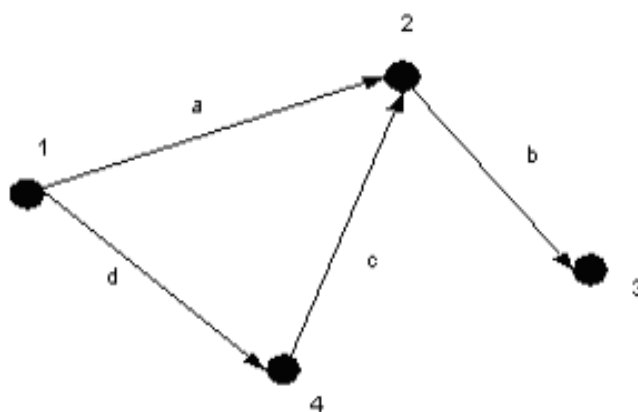


Рис.1.1. Орієнтований граф.

Помічений граф – це граф, в якому ребрам призначені певні значення або ваги. Наприклад, вага може відображати відстань між двома вершинами або вартість переходу по ребру.

Зважений граф – це граф, в якому вершинам можуть бути призначені певні значення або мітки. Наприклад, мітки можуть відображати властивості об'єктів, представлених вершинами.

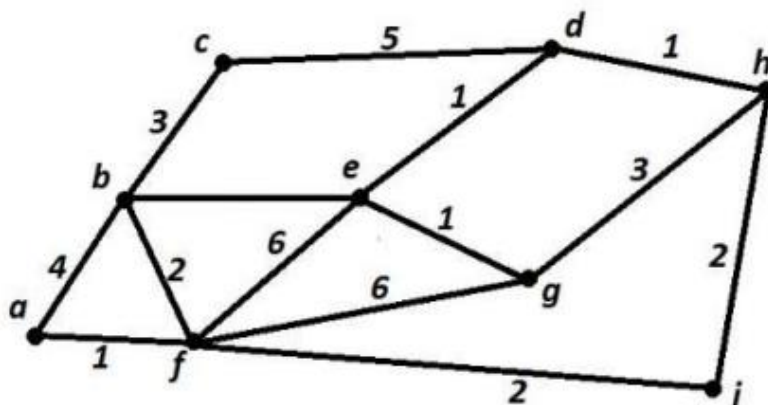


Рис.1.2. Зважений граф.

Додаткові види графів включають:

- *Циклічний граф*: граф, в якому можна знайти цикл, який проходить через кілька ребер.

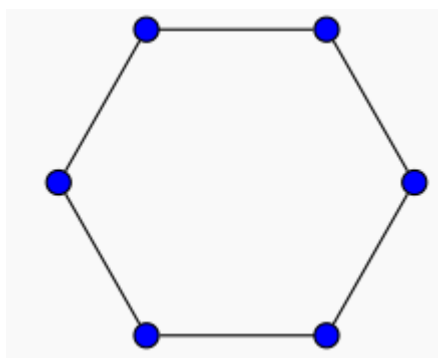


Рис.1.3. Циклічний граф з довжиною 6.

- *Ациклічний граф*: граф, в якому не можна знайти цикл.

- *Повний граф*: граф, в якому кожна вершина з'єднана з усіма іншими вершинами.

- *Дерево*: ациклічний зв'язний граф, у якого є лише одна коренева вершина, а всі інші вершини можуть мати одну або більше дочірніх вершин.



Рис. 1.4. Дерево графа.

Це лише деякі з видів графів, а існує ще багато інших, включаючи скеровані графи, планарні графи, двозначні графи.

Скеровані графи – це графи, в яких ребра мають напрямок. Тобто, вони можуть бути вказані як стрілки, які вказують напрямок від одного вузла до іншого.

Планарні графи – це графи, які можуть бути відображені на площині без перетинання ребер. Тобто, вони можуть бути намальовані таким чином, що жодні два ребра не перетинаються. Графи, які не можуть бути відображені без перетинання ребер, називаються *непланарними графами*.

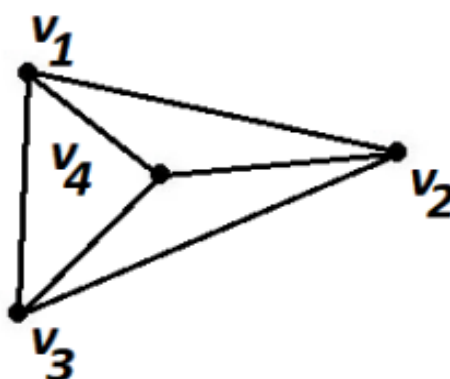


Рис. 1.5. Планарний граф.

Двозначні графи – це графи, в яких ребра мають два напрямки. Тобто, з кожного вузла є два ребра, одне в обидва напрямки. Такі графи також можуть

називатися неорієнтованими графами. Орієнтовані графи, наприклад, скеровані графи, мають ребра лише в одному напрямку [9-10].

1.2. Операції на графах

Найвживаніші операції над графами можна поділити на унарні та бінарні.

Унарні операції – це одномісні операції, які створюють новий граф із старого та бінарні операції – двомісні операції, які створюють нових граф із двох вхідних графів $G_1(V_1, E_1)$ і $G_2(V_2, E_2)$.

Наведемо приклади унарних операцій над графами.

Реберний граф: нехай існує неорієнтований граф G , тоді реберний граф буде позначатись як $L(G)$, він представляє сусідство ребер графа G ;

Двоїстий граф: нехай граф G' – двоїстий до планарного графа G граф, у якого усі вершини відповідають граням графа G (Рис. 1.6.).

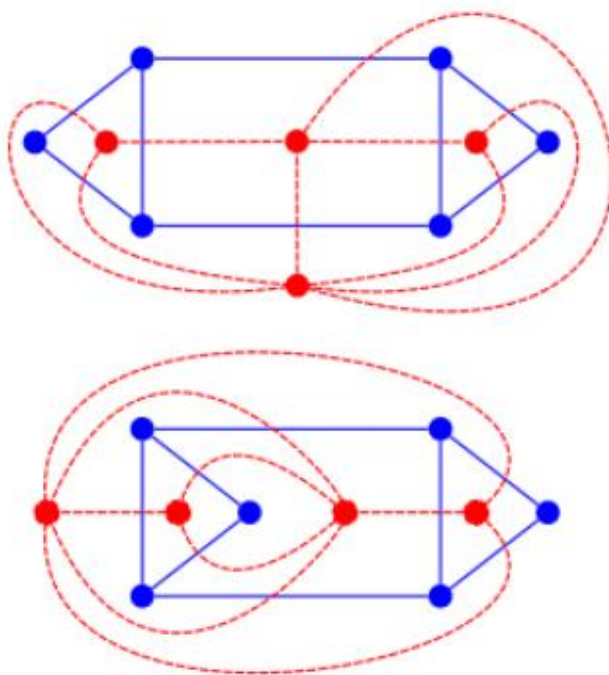


Рис. 1.6. Червоні графи є двоїстими до синього графа.

Доповнення: граф H називається оберненим до графа G (доповнення графа G), якщо це граф на тих самих вершинах, поєднаних ребрами тоді і тільки тоді, коли вони несуміжні в G (Рис. 1.7).

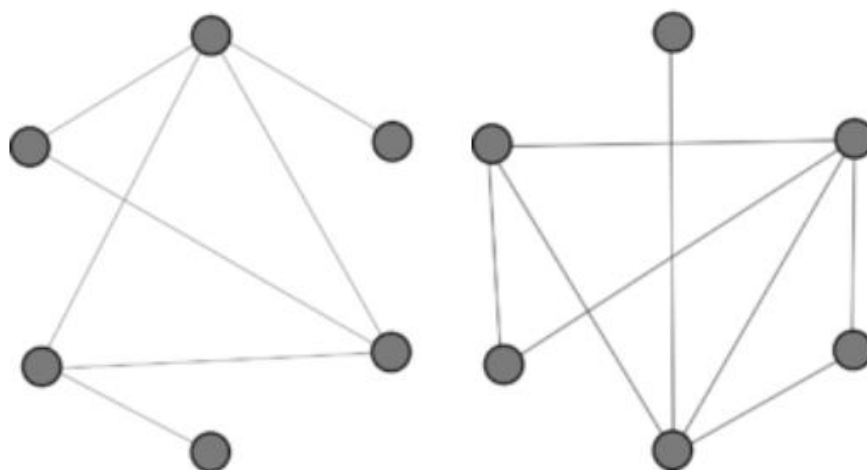


Рис. 1.7. Граф (зліва) і його доповнення (справа).

Міnor графа: граф H називається міномом для заданого графа G , який утворюється з графа G способом видалення ребер і вершин та стягуванням відповідних ребер.

Стягування ребер: операція, яка видаляє ребро з графа, а вершини, які він зв'язував до цього, зливаються в одну.

Ступінь графа: ступінь G_k неорієнтованого графа G – це другий граф, який має той самий набір вершин та дві вершини цього графа суміжні, якщо відстань між цими вершинами у початковому графі G не перевищує k .

Розглянемо приклади бінарних операцій над графами.

Об'єднання графів: граф, що містить об'єднання множин вершин V_1 і V_2 графів і множин дуг.

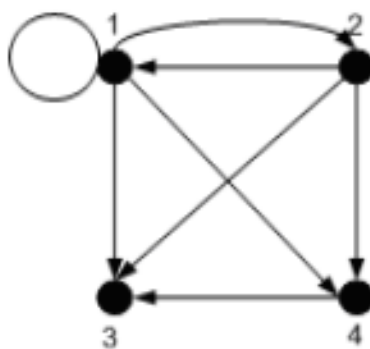
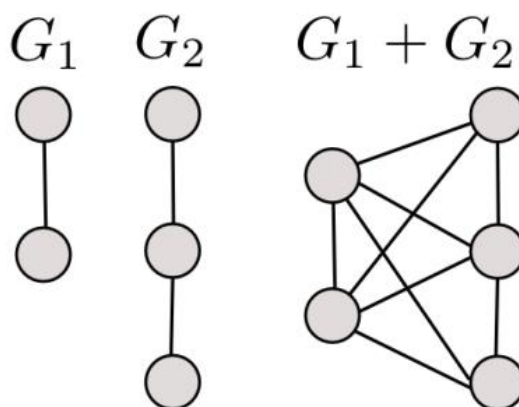
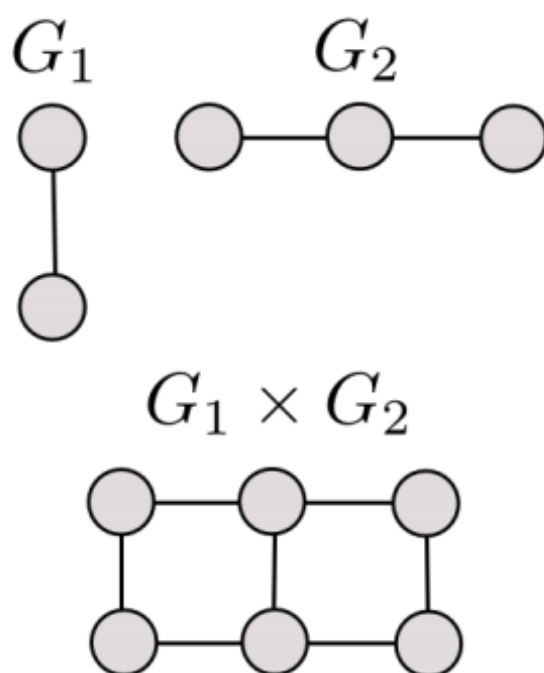


Рис.1.8. Об'єднання графів.

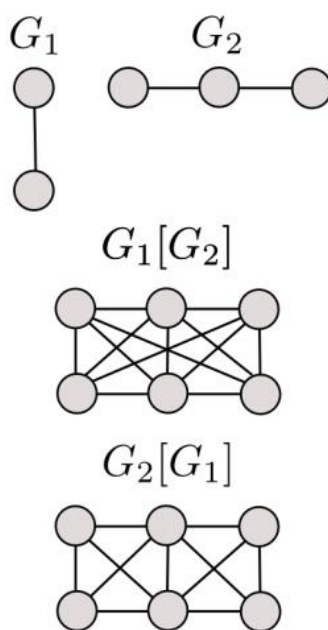
З'єднання: з'єднання двох графів, до яких додані усі дуги, що з'єднують вершини обох графів (Рис. 1.9.).

Рис. 1.9. З'єднання графів G_1 і G_2 .

Добуток графів: добутком $G_1 \times G_2$ називають граф з множиною вершин V , яка дорівнює декартовому добутку $V_1 \times V_2$. Вершини $u = (u_1, u_2)$ і $v = (v_1, v_2)$ з $V = V_1 \times V_2$ суміжні у $G = G_1 \times G_2$ тоді і тільки тоді, коли $(u_1 = v_1, \text{ а } u_2 \text{ і } v_2 - \text{суміжні})$ чи $(u_2 = v_2, \text{ а } u_1 \text{ і } v_1 - \text{суміжні})$ (Рисунок 1.10.).

Рис. 1.10. Добуток графів G_1 і G_2 .

Композиція графів : композиція $G_1(G_2)$ графів G_1 і G_2 – це граф з множиною вершин E , у якому існує дуга (x_i, x_j) тоді і тільки тоді, коли існує дуга (x_i, x_k) , яка належить множині E_1 і дуга (x_k, x_j) , яка належить множині E_2 (Рис. 1.11.).

Рисунок 1.11. Композиція графів G_1 і G_2 .

Перетин: перетин $G_1 \cap G_2$ графів G_1 і G_2 – це граф з множиною вершин $X_1 \cap X_2$ та з множиною ребер $E = E_1 \cap E_2$ [9].

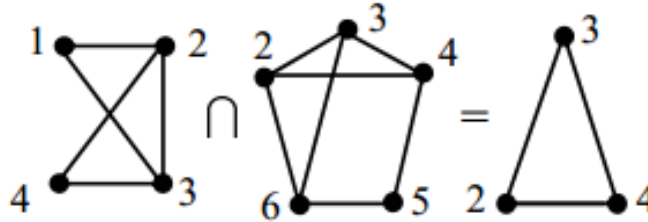


Рис. 1.12. Перетин графів.

1.3. Ендоморфізми та автоморфізми графів

Графи, які ми розглядаємо в даній роботі, є скінченними неорієнтованими графами без петель і мультиребер. Якщо G є графом, то позначимо $V(G)$ (або просто G) і $E(G)$ його множину вершин і ребер відповідно.

Граф H називається *підграфом* G , якщо $V(H) \subset V(G)$ та $E(H) \subset E(G)$. Як зазвичай, P_n і C_n позначають шлях і коло з n вершинами відповідно.

Нехай G і H — неорієнтовані графи. *Гомоморфізм* $f: G \rightarrow H$ є вершинним відображенням $V(G) \rightarrow V(H)$, яке зберігає суміжність, тобто таким, що для будь-яких $a, b \in V(G)$, з умови $\{a, b\} \in E(G)$ випливає, що $\{f(a), f(b)\} \in E(H)$. Гомоморфізм графа G у себе називається *ендоморфізмом* G .

Ендоморфізми поділяються на такі типи: слабкі, напівсильні, локально сильні, квазісильні та сильні.

Ендоморфізм $f: V(G) \rightarrow V(H)$ називається *слабким* ендоморфізмом, якщо f зберігає або стискає ребра, тобто якщо $f(x) = f(y)$ або $\{f(x), f(y)\} \in E(H)$ кожного разу, коли $\{x, y\} \in E(G)$. Позначається $WEnd(G)$.

Напівсильним називається ендоморфізмом φ графа G , якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що існують $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$, $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$, такі, що $\{x', y'\} \in E$. Множина всіх напівсильних ендоморфізмів графа G позначається як $HEndG$.

Локально сильним називається ендоморфізм φ графа G , якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що кожному $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$ відповідає $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$, такий, що $\{x', y'\} \in E$, і навпаки, те саме виконується для кожного прообразу $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$. Множина всіх локально сильних ендоморфізмів позначається $L\text{End}G$.

Квазісильним називається ендоморфізм φ графа G , якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що існує $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$ який являється суміжним кожному прообразу $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$, і навпаки для кожного прообразу $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$. Множина квазісильних ендоморфізмів графа G позначається $Q\text{End}G$.

Сильним ендоморфізмом графа G називається ендоморфізм φ , якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що $\{x, y\} \in E$ для всіх $x, y \in V$. Множина всіх сильних ендоморфізмів утворює моноїд і позначається $S\text{End}G$.

Автоморфізмом графа G називається підстановка φ множини V , якщо $\{x, y\} \in E$ лише в тому випадку, коли $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ для всіх $x, y \in V$. Множина всіх автоморфізмів відносно операції композиції утворює групу і позначається $\text{Aut}G$.

Нижче наведено приклад ендоморфізмів кожного типу для деякого відношення.

Приклад 1.1. Розглянемо приклади ендоморфізмів кожного типу для такого відношення:

$$\varphi = \{(k, l), (l, k), (k, m), (m, k), (l, m), (m, l), (m, n), (l, l), (m, m), (n, n), (o, o), (o, p), (p, o), (p, p)\}, \text{ визначеного на множині } X = \{k, l, m, n, o, p\}.$$

$$\begin{pmatrix} k & l & m & n & o & p \\ m & m & m & l & m & m \end{pmatrix} \in \text{End}(X, \varphi) \setminus H\text{End}(X, \varphi),$$

$$\begin{pmatrix} k & l & m & n & o & p \\ m & m & l & l & o & o \end{pmatrix} \in H\text{End}(X, \varphi) \setminus L\text{End}(X, \varphi),$$

$$\begin{pmatrix} k & l & m & n & o & p \\ l & l & l & l & n & n \end{pmatrix} \in L\text{End}(X, \varphi) \setminus Q\text{End}(X, \varphi),$$

$$\begin{pmatrix} k & l & m & n & o & p \\ l & l & m & n & o & o \end{pmatrix} \in QEnd(X, \varphi) \setminus SEnd(X, \varphi),$$

$$\begin{pmatrix} k & l & m & n & o & p \\ k & l & m & n & o & o \end{pmatrix} \in SEnd(X, \varphi) \setminus Aut(X, \varphi),$$

$$\begin{pmatrix} k & l & m & n & o & p \\ k & l & m & n & p & o \end{pmatrix} \in Aut(X, \varphi).$$

Нехай f — ендоморфізм графа G . Підграф G називається ендоморфним образом G під f , позначається I_f , якщо $V(I_f) = f(V(G))$ і $\{f(a), f(b)\} \in E(I_f)$ тоді і тільки тоді, коли існують $c \in f^{-1}(f(a))$ і $d \in f^{-1}(f(b))$ такі, що $\{c, d\} \in E(G)$, де $a, b, c \in G$. Це визначення видається природним, оскільки воно гарантує не тільки те, що вершина в I_f повинна бути «зображенням» деякої вершини в G під f але і те, що ребро в I_f має бути «зображенням» деякого ребра в G під f .

Нехай $G(V, E)$ — граф. Нехай $\rho \subset V \times V$ — відношення еквівалентності на V . Позначимо через $[a]_\rho$ клас еквівалентності, що містить елементи $a \in V$ під ρ . Граф, позначений G/ρ , називається *фактор-графом* G при ρ , якщо $V(G/\rho)$ і $\{[a]_\rho, [b]_\rho\} \in E(G/\rho)$ тоді і тільки тоді, коли існує $c \in [a]_\rho, d \in [b]_\rho$ такий, що $\{c, d\} \in E(G)$. Нехай f — ендоморфізм G ; під ρ_f позначимо відношення еквівалентності на $V(G)$, індуковане f , тобто для $a, b \in V(G)$, $(a, b) \in \rho_f$ тоді і тільки тоді, коли $f(a) = f(b)$. Граф G/ρ_f називається факторним графом f . Визначимо відображення $i_f: V(G/\rho_f) \rightarrow V(I_f)$ з $i_f([x]_{\rho_f}) = f(x)$ для $x \in V(G)$. Очевидно, i_f це чітко визначено. Тепер ми маємо:

Твердження 1.2. *Нехай G — граф і нехай $a \in End(G)$. Тоді відображення i_f є ізоморфізмом від G/ρ_f до I_f .*

Доведення. За теоремою про гомоморфізм, i_f є бієктивним. Тепер ми покажемо, що i_f та i_f^{-1} є гомоморфізмами. З визначення факторного графа f та ендоморфного зображення G під f , легко побачити наступне. Для $x, y \in G$, $\{[x]_{\rho_f}, [y]_{\rho_f}\} \in E(G/\rho_f) \Leftrightarrow$ існують такі $c \in [x]_{\rho_f}, d \in [y]_{\rho_f}$, що $\{c, d\} \in E(G)$.

$f^{-1}(f(x)), d \in f^{-1}(f(y))$ та $\{c, d\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(I_f)$. На цьому доведення завершено.

Зауваження 1.3. Нехай $f, g \in \text{End}(G)$. Якщо $\rho_f = \rho_g$, то $G/\rho_f = G/\rho_g$. За твердженням 1.1, $G/\rho_f \cong I_f$ відносно ізоморфізму i_f , а $G/\rho_g \cong I_g$ відносно ізоморфізму i_g . Таким чином, якщо $I_f \cong I_g$. Позначимо $i_{f,g} := i_g i_f^{-1}$ і $i_{g,f} := i_f i_g^{-1}$. Легко помітити, що $i_{f,g}(i_{g,f})$ є ізоморфізмом з I_f на I_g (з I_g на I_f) і $i_{f,g}^{-1} = i_{g,f}$. Це можна показати на наступній схемі:

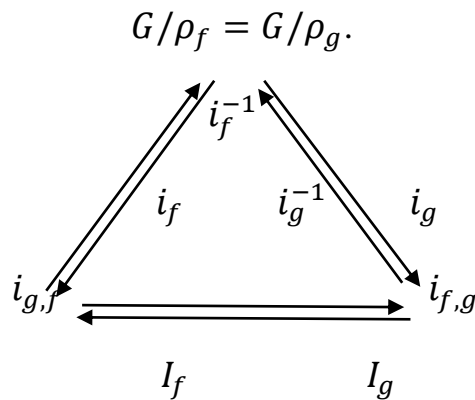


Рис. 1.13.

Згадаймо визначення ендоморфного зображення і зауважимо, що ендоморфізм графа є відображенням, що зберігає суміжність. Тоді наступні факти майже тривіальні.

Зауваження 1.4. Нехай G — граф, $f \in \text{End}(G)$ і $a, b \in G$.

(1) Якщо G зв'язний, то I_f зв'язний.

(2) $d_{I_f}(f(a), f(b)) \leq d_G(a, b)$ (де $d_H(x, y)$ позначає відстань між вершинами x і y на графу H).

Нехай S — напівгрупа. Визначимо відношення \mathcal{L} на S таке, що $(a, b) \in \mathcal{L}$, якщо $S^1 a = S^1 b$ (S^1 — напівгрупа, отримана з S шляхом приєднання до одиничного елемента, якщо необхідно); аналогічно визначимо відношення \mathcal{R} на S таке, що $(a, b) \in \mathcal{R}$ якщо $a S^1 = b S^1$. \mathcal{L} і \mathcal{R} - відношення еквівалентності на S . \mathcal{L} - права конгруентність, а \mathcal{R} - ліва конгруентність. Визначимо $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap$

\mathcal{R} . Завдяки комутативності \mathcal{L} і \mathcal{R} , $\mathcal{D} = \mathcal{L} \cup \mathcal{R} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. Ці відношення еквівалентності називаються відношеннями Гріна на напівгрупі S . Наступне твердження буде використано в цій роботі.

Твердження 1.5. [8] *Нехай a, b — елементи напівгрупи S . Тоді $(a, b) \in \mathcal{L}$ тоді і тільки тоді, коли в S^1 існують x, y такі, що $xa = b, yb = a$. Крім того, $(a, b) \in \mathcal{R}$ тоді і тільки тоді, коли існують u, v в S^1 такі, що $au = b, bv = a$.*

Висновки до розділу 1

Цей розділ присвячено основним поняттям теорії графів та ендоморфізмам графів, що використовуються в магістерській роботі.

У першому підрозділі введено основні види графів, наведено визначення та геометричні зображення найвживаніших типів графів.

У другому підрозділі розглянуто унарні та бінарні операції на графах. Операції дозволяють перетворювати графи, за допомогою таких перетворень можна отримувати нові класи графів.

У третьому підрозділі визначено ендоморфізми та автоморфізми графів. Розглянуто різні типи ендоморфізмів графів, які будуть використовуватися в наступних розділах роботи.

Розділ 2. Формула для числа слабких ендоморфізмів на шляхах

У цьому розділі досліджується формула для знаходження числа слабких ендоморфізмів на скінченних шляхах [5]. Зокрема, У. Кнауером було знайдено найкоротший шлях на тривимірній квадратній решітці між двома фіксованими точками.

2.1. Поняття слабого ендоморфізму

Розглянемо скінченні прості графи G з множиною вершин $V(G)$ і множиною ребер $E(G)$. Нехай G і H — два графи. Відображення $f: V(G) \rightarrow V(H)$ є гомоморфізмом, якщо f зберігає ребра, тобто, якщо $\{f(x), f(y)\} \in E(H)$ кожного разу, коли $\{x, y\} \in E(G)$.

Відображення $f: V(G) \rightarrow V(H)$, яке будемо називається слабким гомоморфізмом (ендоморфізмом), якщо f зберігає або стискає ребра, тобто якщо $f(x) = f(y)$ або $\{f(x), f(y)\} \in E(H)$ кожного разу, коли $\{x, y\} \in E(G)$.

Слабкий гомоморфізм (ендоморфізм) G у себе називається *слабким гомоморфізмом* (ендоморфізмом) G . Позначимо множину слабких ендоморфізмів G через $WEnd(G)$. Очевидно, що $WEnd(G)$ утворює моноїд відносно операції композиції. Нехай $P_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ неорієнтований шлях з довжиною $n-1$, причому $n > 1$. Позначимо число слабких ендоморфізмів шляху P_n через $|WEnd(P_n)|$, та кількість слабких ендоморфізмів шляху P_n , який відображає 0 до j через $|WEnd^j(P_n)|$.

Нехай n — додатнє ціле число, коефіцієнт многочлена

$$\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}, \quad (1)$$

де $n = r_1 + r_2 + \dots + r_k$ та $k \in \mathbb{Z}^+$.

Наступний результат добре відомий і розширює формулу (1)

$$\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \binom{n-1}{r_1-1, r_2, \dots, r_k} + \binom{n-1}{r_1, r_2-1, \dots, r_k} + \dots + \binom{n-1}{r_1+r_2, \dots, r_k-1} \quad (2)$$

Далі скористаємося коефіцієнтом многочлена (1) і розширеною формулою (2), щоб знайти всі найкоротші шляхи на тривимірній квадратній решітці.

Розглянемо тривимірні квадратні решітки $M(i, j, k)$ на малюнку 1 і r -сходові тривимірні квадратні решітки $M_r(i, j, k)$ на Рис. 2.1. (тут вибираємо $i = 6, j = 5, k = 4$) та $r = 2$,

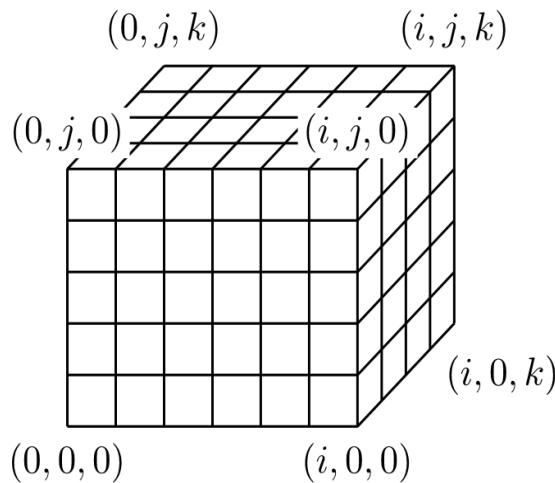


Рис.2.1.

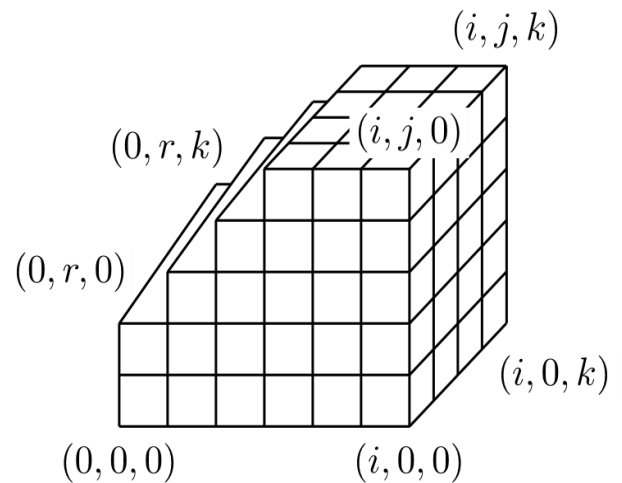


Рис.2.2.

Найкоротший шлях на цій тривимірній квадратній решітці від точки $(0,0,0)$ до будь-якої точки (i, j, k) можна отримати, пройшовши від точки $(0,0,0)$ до точки (i, j, k) на $(1,0,0)$ або $(0,1,0)$, або $(0,0,1)$ і аналогічно для наступних кроків. І більш загально від (i_0, j_0, k_0) до $(i_0 + 1, j_0, k_0)$, або $(i_0, j_0 + 1, k_0)$ або $(i_0, j_0, k_0 + 1)$.

Твердження 2.1.[5] Числа $M(i, j, k)$ і $M_r(i, j, k)$ ($r < j$) найкоротших шляхів від точки $(0,0,0)$ до будь-якої точки (i, j, k) в тривимірній квадратній решітці і у R -сходах тривимірні квадратні решітки знаходяться за формулою

$$M(i, j, k) = \binom{i+j+k}{i, j, k},$$

Та відповідно

$$M_r(i, j, k) = M(i, j, k) - M(j - r - 1, i + r + 1, k) = \binom{i + j + k}{i, j, k} - \binom{i + j + k}{j - r - 1, i + r + 1, k}.$$

2.2. Кількість слабких ендоморфізмів на шляхах

У цьому підрозділі наведемо алгоритм чисел слабких ендоморфізмів на шляхах за допомогою тривимірної квадратної решітки і тривимірної квадратної решітки г-сходів.

На Рис. 2.4. показані можливі слабкі ендоморфізми шляху P_4 , що відображають 0 до 0, тобто елементи $WEnd^0(P^4)$. Там цифри у верхньому рядку, елементи домену і цифри у лівій колонці позначають елементи образу.

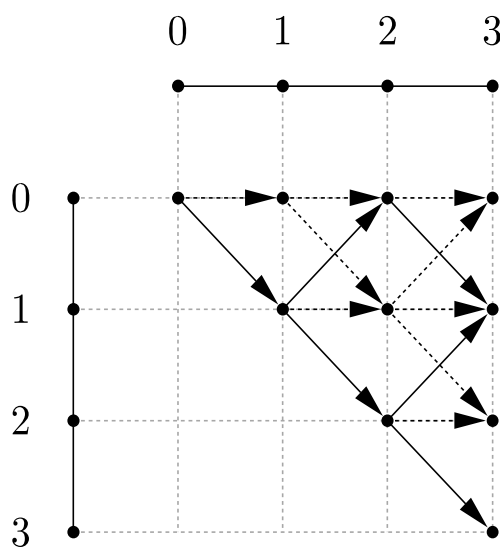


Рис. 2.4.

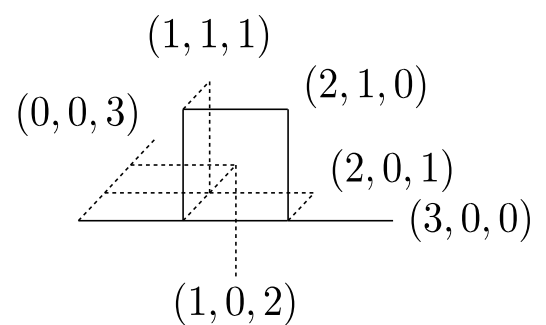


Рис. 2.5.

Візьмемо відображення $f \in WEnd^0(P^4)$ з $f(0) = f(1) = f(3) = 0$ і $f(2) = 1$, символізовані верхньою послідовністю пунктирних стрілок. Тепер змодельюємо це відображення найкоротшим шляхом у 3-вимірній квадратній решітці наступним чином: $f(0)$ та $f(x)$ дорівнює $(0,0,0)$ та (i, j, k) відповідно для деякого $x \in X = \{0,1,2,3\}$. Тепер переходимо від (i, j, k) до $(i + 1, j, k)$, $(i, j + 1, k)$, або $(i, j, k + 1)$, якщо $f(x + 1) = f(x) + 1$, $f(x + 1) =$

$f(x) - 1$, або $f(x + 1) = f(x)$ відповідно. Так f представлено в 3-вимірній квадратній решітці найкоротшим шляхом від $(0,0,0)$ до $(1,1,1)$, порівняйте рисунку 2.5. Отже, кардинальність $|WEnd^0(P^4)|$ — підсумовування $M(i, j, k)$ та $M_r(i, j, k)$ де $i + j + k = 3$.

Отже, по Рис. 2.5 і твердженню 2.1 отримуємо

$$\begin{aligned}
 |WEnd^0(P^4)| &= M(3,0,0) + M_0(2,1,0) + M(2,0,1) + M_0(1,1,1) + M(1,0,2) \\
 &\quad + M(0,0,3) \\
 &= \binom{3}{3,0,0} + \binom{3}{2,1,0} - \binom{3}{0,3,0} + \binom{3}{2,0,1} + \binom{3}{1,1,1} - \binom{3}{0,2,1} \\
 &\quad + \binom{3}{1,0,2} + \binom{3}{0,0,3} = 13.
 \end{aligned}$$

Аналогічно як на Рис. 2.4. і Рис. 2.5, на Рис. 2.6. можливі слабкі ендоморфізми шляху P^4 , які відображають 0 до 1, тобто елементи з $WEnd^1(P^4)$ представляються. Звідси випливає, що кардинальність $WEnd^1(P^4)$ — це сума чисел $M(i, j, k)$ і $M_r(i, j, k)$, де $i + j + k = 3$ (див. Рис. 2.6.).

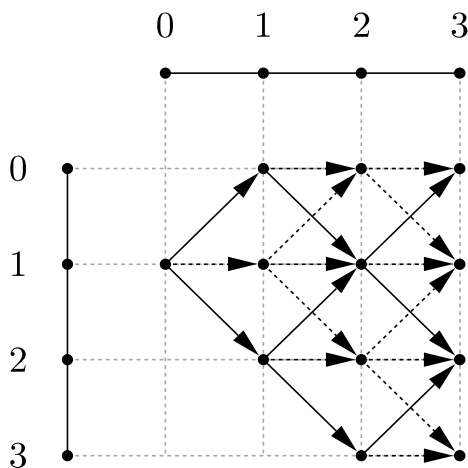


Рис. 2.6.

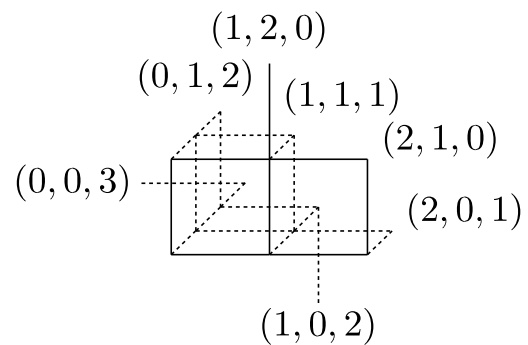


Рис. 2.7.

Отже, по Рис. 2.7. і твердженню 2.1. отримуємо

$$\begin{aligned}
|WEnd^0(P^4)| &= M(2,1,0) + M_0(1,2,0) + M(2,0,1) + M_0(1,1,1) + M(1,0,2) \\
&\quad + M(0,1,2) + M(0,0,3) \\
&= \binom{3}{2,1,0} + \binom{3}{1,2,0} - \binom{3}{0,3,0} + \binom{3}{2,0,1} + \binom{3}{1,1,1} + \binom{3}{1,0,2} \\
&\quad + \binom{3}{0,1,2} + \binom{3}{0,0,3} = 21.
\end{aligned}$$

Наступне твердження звучить таким чином:

Твердження 2.2. *Нехай n — додатнє ціле число, а j — невід'ємне ціле число, таке, що $j < n$. Тоді*

$$(1) |WEnd^j(P_n)| = |WEnd^{n-j-1}(P_n)|,$$

$$(2) |WEnd(P_{2n})| = 2 \sum_{j=0}^{n-1} |WEnd^j(P_{2n})|,$$

$$(3) |WEnd(P_{2n+1})| = 2 \sum_{j=0}^{n-1} |WEnd^j(P_{2n+1})| + |WEnd^n(P_{2n+1})|.$$

Замість доведення знову розглянемо P_4 . Ми використовуємо твердження 2.2., пункти 4, 6 [5] і твердження 2.1., щоб отримати це $|WEnd^0(P_4)| = |WEnd^3(P_4)| = 13$ і

$$|WEnd^1(P_4)| = |WEnd^2(P_4)| = 21. \text{ Таким чином, } |WEnd(P_4)| = 2(13 + 21) = 68.$$

Далі введемо наступні позначення:

$$eM(i, j) := \sum_{i_0=0}^i \sum_{j_0=0}^j M(i - i_0, j - j_0, i_0 + j_0), \quad (3)$$

$$eM_r(i, j) := \sum_{i_0=0}^{i-j+r} M_r(i - i_0, j, i_0). \quad (4)$$

Далі, $eM_r(i, j) = 0$, якщо $i - j + r < 0$ позначимо це через (2.3). Таким чином, на прикладі P_4 , $|WEnd^0(P_4)| = eM(3, 0) = eM_0(2, 1)$ та $|WEnd^1(P_4)| = eM(2, 1) + eM_1(1, 2)$.

Спочатку доведемо допоміжний результат.

Твердження 2.3. Нехай n — додатнє ціле число, а j — невід'ємне ціле число, таке, що $j < \frac{n}{2} - 1$. Тоді

$$|WEnd^j(P_4)| = \sum_{i_0=0}^i \sum_{j_0=0}^j \binom{n-1}{i-i_0, j-j_0, i_0+j_0} + \\ \sum_{s=1}^n \left[\sum_{i_0=0}^{i-2s} \left[\binom{n-1}{i-s-i_0, j+s, i_0} - \binom{n-1}{s-1, n-s-i_0, i_0} \right] + \right. \\ \left. \sum_{j_0=0}^{j-2s} \left[\binom{n-1}{j-s-j_0, i+s, j_0} - \binom{n-1}{s-1, n-s-j_0, j_0} \right] \right],$$

де $n - 1 = i + j$.

Доведення. Нехай $i = n - j - 1$. Знайдемо $|WEnd^j(P_n)|$, обчислюючи відповідно до наступного Рис.2.8., намальованого для $n = 12$, $j = 5$, $s = 1, 2, 3$:

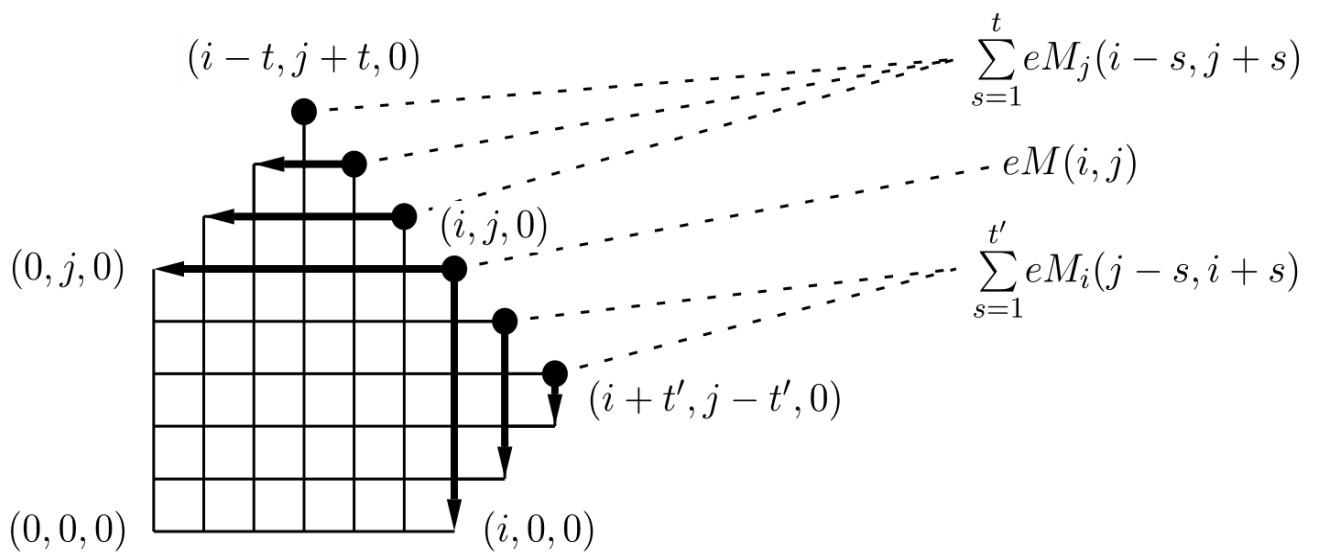


Рис. 2.8.

де $i = 6, t = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = 3, t' = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = 2$, та $s = 1, 2, 3$

Таким чином, $|WEnd^j(P_n)| = eM(i, j) + \sum_{s=1}^n eM_j(i - s, j + s) + \sum_{s=1}^n eM_i(j - s, i + s)$.

Оскільки $eM_j(i - s, j + s) = eM_i(j - s, i + s) = 0$, якщо $s > n$ (ми спостерігаємо, що $eM_j(i - s, j + s) = 0$ та $eM_i(j - s, i + s) = 0$, якщо $i > \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$ та $s > \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$, відповідно). Рівняння (3), (4) і твердження 2.1. передбачають, що

$$\begin{aligned}
 eM(i, j) &= \sum_{i_0=0}^i \sum_{j_0=0}^j M(i - i_0, j - j_0, i_0 + j_0), \\
 &= \sum_{i_0=0}^i \sum_{j_0=0}^j \binom{n-1}{i - i_0, j - j_0, i_0 + j_0}, \\
 \sum_{s=1}^n eM_j(i - s, j + s) &= \sum_{s=1}^n \left[\sum_{i_0=0}^{i-2s} M_j(i - s - i_0, j + s, i_0) \right] = \\
 &= \sum_{s=1}^n \left[\sum_{i_0=0}^{i-2s} \left[\binom{n-1}{i - s - i_0, j + s, i_0} - \binom{n-1}{s - 1, n - s - i_0, i_0} \right] \right], \\
 \sum_{s=1}^n eM_i(j - s, i + s) &= \sum_{s=1}^n \left[\sum_{j_0=0}^{j-2s} M_i(j - s - j_0, i + s, j_0) \right] = \\
 &= \sum_{s=1}^n \left[\sum_{j_0=0}^{j-2s} \left[\binom{n-1}{j - s - j_0, i + s, j_0} - \binom{n-1}{s - 1, n - s - j_0, j_0} \right] \right].
 \end{aligned}$$

Тому,

$$|WEnd^j(P_n)| = \sum_{i_0=0}^i \sum_{j_0=0}^j \binom{n-1}{i - i_0, j - j_0, i_0 + j_0} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=1}^n \left[\sum_{j_0=0}^{j-2s} \left[\binom{n-1}{j-s-i_0, j+s, i_0} - \binom{n-1}{s-1, n-s-i, i_0} \right] \right] = \\
& = \sum_{j_0=0}^{j-2s} \left[\binom{n-1}{j-s-j_0, i+s, j_0} - \binom{n-1}{s-1, n-s-j_0, j_0} \right].
\end{aligned}$$

Тепер ми можемо довести кінцевий результат.

Теорема 2.1. [5] Нехай n — додатнє ціле число, а j — невід'ємне ціле число, таке, що $j < n$. Тоді

$$(1) \quad |Wend(P_n)| = 2 \sum_{j=0}^{n-1} [eM(i, j) + \sum_{s=1}^{2n} [eM_j(i-s, j+s) + eM_i(j-s, i+s)]]],$$

де $i = 2n - j - 1$,

$$\begin{aligned}
(2) \quad |WEnd(P_{2n+1})| &= 2 \sum_{j=0}^{n-1} [eM(i, j) + \sum_{s=1}^{2n} [eM_j(i-s, j+s) + \\
& eM_i(j-s, i+s)]] + eM(n, n) \\
& + 2 \sum_{s=1}^{2n+1} eM_n(n-s, n+s), \text{ де } i = 2n - j,
\end{aligned}$$

де $eM(i, j) = \sum_{i_0=0}^i \sum_{j_0=0}^j M(i-i_0, j-j_0, i_0+j_0)$

та $eM_r(i, j) = \sum_{i_0=0}^{i-j+r} M_r(i-i_0, j-j_0, i_0+j_0)$.

Доведення.[5] (1) Це очевидно з твердження 2.2(2) та твердження 2.3(2).

З твердження 2.2(3),

$$\begin{aligned}
|Wend(P_{2n+1})| &= 2 \sum_{j=0}^{n-1} \left[eM(i, j) + \sum_{s=1}^{2n+1} [eM_j(i-s, j+s) + eM_i(j-s, i+s)] \right] \\
& + |WEnd^n(P_{2n+1})|,
\end{aligned}$$

де $i = 2n - j$.

Розглянемо випадок, коли $j = n$. Потім $i = n$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} |WEnd^n(P_{2n+1})| &= eM(n, n) + \sum_{s=1}^{2n+1} [eM_n(n-s, n+s) + eM_n(n-s, n+s)] \\ &= eM(n, n) + 2 \sum_{s=1}^{2n+1} eM_n(n-s, n+s). \end{aligned}$$

2.3. Ескізне розширення до гомоморфізмів з контурів

Тепер розглянемо метод, як поширити отримані результати на гомоморфізми, починаючи з шляху до певних лексикографічних добутків цим шляхом.

Нагадаємо, лексикографічний добуток $G[H]$ двох графів G і H має множину вершин $V(G) \times V(H)$ і кожного разу коли $\{x_1, x_2\} \in E(G)$, або $x_1 = x_2$ та $\{y_1, y_2\} \in E(H)$. Розглянемо поведінку гомоморфізму від P_n до $P_n[K_m]$, де K_m позначає повний граф з множиною вершин $V(K_m) = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, і гомоморфізму від P_n до $P_n[C_m]$, де C_m позначає цикл, довжина $m-1$ з множиною вершин $V(C_m) = \{0, 1, \dots, m-1\}$, $m \geq 3$.

Візьмемо $f \in Hom(P_n, P_n[K_2])$ такий, що $f(i) = (j, k_1)$, де $i, j \in V(P_n)$ і $k_1 \in V(K_2)$. Тоді $f(i+1) \in \{(j, k_2), (j+1, k_1), (j-1, k_1)\}$, якщо $j-1, j+1 \in V(P_n)$. Отже, для кожного $f: V(P_n) \rightarrow V(P_n[K_2])$, визначимо $g: V(P_n) \rightarrow V(P_n)$ через $g(i) = j$, якщо $f(i) = (j, k_x)$; $k_x \in V(K_2)$. Тоді $g \in WEnd^i(P_n)$ кожного разу, коли $f \in Hom^{(i, k_x)}(P_n, P_n[K_2])$, тобто $f \in Hom(P_n, P_n[K_2])$, які відображають 0 до (i, k_x) для всіх $k_x \in V(K_2)$. Отже, $|Hom(P_n, P_n[K_2])| = 2|WEnd(P_n)|$. Таким чином, за теоремою 2.1 ми отримуємо кардинальність $|Hom(P_n, P_n[K_2])|$.

Отже, для кожного $f \in Hom^{(i, k_x)}(P_n, P_n[K_2])$ є найкоротшим шляхом на цій 3-вимірній квадратній решітці від точки $(0, 0, 0)$ до деякої точки (i, j_1, j_2) і деякої квадратної решітки г-сходів.

Розглянемо $(m + 1)$ -вимірну квадратну решітку $M(i, j_1, j_2, \dots, j_m)$ і r -сходову $(m + 1)$ -вимірну квадратну решітку $M_r(i, j_1, j_2, \dots, j_m)$. Найкоротший шлях на $(m + 1)$ -вимірній квадратній решітці від точки $(0, 0, 0, \dots, 0)$ до будь-якої точки $(i, j_1, j_2, \dots, j_m)$ можна отримати, пройшовши від точки $(0, 0, 0, \dots, 0)$ до точки $(i, j_1, j_2, \dots, j_m)$ по $(i_0, j_{01}, j_{02}, \dots, j_{0m})$ разом з

$$(i_0 + 1, j_{01}, j_{02}, \dots, j_{0m}), (i_0, j_{01} + 1, j_{02}, \dots, j_{0m}), (i_0, j_{01}, j_{02} + 1, \dots, j_{0m}), \dots, (i_0, j_{01}, j_{02}, \dots, j_{0m} + 1).$$

Використовуючи (1), (2) і індукцію, отримуємо наступне судження.

Твердження 2.4. Числа $M(i, j_1, j_2, \dots, j_m)$ та $M_r(i, r + m, j_2, \dots, j_m)$ ($j_1 = r + m$), найкоротших шляхів від точки $(0, 0, \dots, 0)$ до будь-якої точки $(i, j_1, j_2, \dots, j_m)$ в $(m + 1)$ -вимірній квадратній решітці і в r -сходах $(m + 1)$ -вимірної квадратної решітки дорівнює $M(i, j_1, j_2, \dots, j_m) = \binom{i + j_1 + j_2 + \dots + j_m}{i, j_1, j_2, \dots, j_m}$ та

$$M_r(i, r + m, j_2, \dots, j_m) = \binom{i + j_1 + j_2 + \dots + j_m}{i, j_1, j_2, \dots, j_m} - \binom{i + j_1 + j_2 + \dots + j_m}{m - 1, r + i + 1, j_2, \dots, j_m},$$

відповідно.

Нехай $f \in \text{Hom}(P_n, P_n[K_m])$ такий, що $f(i) = (j, k_x)$, де $i, j \in V(P_n)$ і $k_x \in V(K_m)$. Тоді

$$f(i + 1) \in \{(j, k_1), (j, k_2), \dots, (j, k_{x-1}), (j, k_{x+1}), (j, k_{x+2}), \dots, (j, k_m)\} \cup \{(j + 1, k_x), (j - 1, k_x)\}, \text{ якщо } j - 1, j + 1 \in V(P_n).$$

Ми можемо використовувати ту саму техніку для гомоморфізму від P_n до $P_n[K_2]$, щоб отримати для кожного $f \in \text{Hom}^{(j, k_x)}(P_n, P_n[K_m])$ найкоротший шлях на цій $(m + 1)$ -вимірній квадратній ґратці від точки $(0, 0, 0, \dots, 0)$ до деякої точки $(i, j_1, j_2, \dots, j_m)$ (і квадратної решітки r -сходів). Далі візьмемо $f \in \text{Hom}(P_n, P_n[C_m])$ такий, що $f(i) = (j, k)$, де $i, j \in V(P_n)$ і $k \in V(C_m)$. Тоді $f(i + 1) \in \{(j, k - 1), (j, k + 1)\} \cup \{(j + 1, k), (j - 1, k)\}$, якщо $j - 1, j + 1 \in V(P_n)$ і $k - 1 = m - 1, k + 1 = 0$ для $k = 0$ і $k = m - 1$ відповідно. Тоді для кожного

$f \in \text{Hom}^{(j,k)}(P_n, P_n[C_m])$ отримаємо найкоротший шлях на цій 4-вимірній квадратній решітці від точки $(0,0,0,0)$ до деякої точки (i, j_1, j_2, j_4) (і квадратної решітки r -сходів). Отже, числа гомоморфізмів від шляху P_n до лексикографічних добутків $P_n[K_m]$ і $P_n[C_m]$ можуть бути знайдені (більш детально див.[5]).

2.4. Ранг ендоморфізму поліноміальної алгебри

Нехай $A = K[x_1, \dots, x_n]$ — вільна комутативно-асоціативна алгебра над полем K , породженим $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. У цьому розділі ми вводимо визначення ендоморфізмів довільного рангу m у вільному комутативно-асоціативному $K[x_1, \dots, x_n]$.

Спочатку введемо «зовнішнє» і «внутрішнє» визначення рангу ендоморфізму φ алгебри A і покажемо їх еквівалентність.

Визначення 2.5. («Зовнішнє» визначення ендоморфізму рангу m .)
Ендоморфізм

$$\varphi: A \rightarrow A$$

має ранг m , якщо $\text{trdeg}(Im\varphi) = m$, тобто ступінь трансцендентності K - алгебри $M = Im\varphi \subseteq A$ дорівнює m . Позначимо це як $\text{rk}(\varphi) = m$. Очевидно, що існують ендоморфізми $K[x_1, \dots, x_n]$ довільного рангу $\leq n$. Наприклад, тотожне відображення на $K[x_1, \dots, x_n]$ є ендоморфізмом рангу n .

Для внутрішнього визначення ендоморфізмів рангу m нам потрібно визначити конгруентність на напівгрупі $\text{End}(A)$ відносно фіксованого ендоморфізму φ на A .

Визначення 2.6. Ендоморфізми φ_1 і φ_2 з $A \in \varphi$ -еквівалентними, якщо $\varphi\varphi_1 = \varphi\varphi_2$. У цьому випадку запишемо $\varphi_1 \sim_\varphi \varphi_2$.

Зрозуміло, що \sim_φ є відношенням еквівалентності на $\text{End}A$. Нехай S — множина всіх φ -еквівалентностей на $\text{End}A$. Визначаємо попередній порядок \preceq

на множині S наступним чином. Ми говоримо, що $\sim_\phi \subseteq \sim_\psi$, де $\phi, \psi \in \text{End}A$, якщо

$$\phi\varphi_1 = \phi\varphi_2 \Rightarrow \psi\varphi_1 = \psi\varphi_2$$

для будь-яких $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{End}A$. Попередній порядок \subseteq може бути розширений до порядку \leq на власній множині $S = S/R$ при еквівалентності R , де $\sim_\phi R \sim_\psi$, тоді і тільки тоді, коли $\sim_\phi \subseteq \sim_\psi$ та $\sim_\psi \subseteq \sim_\phi$. Позначимо через $\sim_{\psi R}$ клас R - еквівалентності відношення \sim_ψ .

Визначення 2.7. Ми говоримо, що $\phi \leq \psi$, якщо $\sim_{\phi R} \leq \sim_{\psi R}$.

Визначення 2.8. Ми говоримо, що $\phi < \psi$ якщо $\sim_{\phi R} \leq \sim_{\psi R}$ і $\sim_{\psi R} \not\leq \sim_{\phi R}$.

Зрозуміло, що відношення \leq і $<$ — це порядок і сильний порядок, відповідно, на $\text{End}A$. Доведення наступної леми очевидне.

Лема 2.9. Нехай $\phi = (\phi_1(\vec{x}), \dots, \phi_n(\vec{x}))$ і $\psi = (\psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_n(\vec{x}))$ — два ендоморфізми $K[x_1, \dots, x_n]$. Тоді

(1) $\phi \sim \psi$ для всіх $H(\vec{x}) \in K[x_1, \dots, x_n]$, умова $H(\phi_1(\vec{x}), \dots, \phi_n(\vec{x})) = 0$ еквівалентна $H(\psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_n(\vec{x})) = 0$.

(2) $\phi \leq \psi$ для всіх $H(\vec{x}) \in K[x_1, \dots, x_n]$, умова $H(\phi_1(\vec{x}), \dots, \phi_n(\vec{x})) = 0$ еквівалентна $H(\psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_n(\vec{x})) = 0$.

(3) $\phi < \psi$ для всіх $H(\vec{x}) \in K[x_1, \dots, x_n]$, умова $H(\phi_1(\vec{x}), \dots, \phi_n(\vec{x})) = 0$ рівнозначна тому, що $H(\psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_n(\vec{x})) = 0$, та існує $R(\vec{x}) \in K[x_1, \dots, x_n]$ такий, що $R(\phi_1(\vec{x}), \dots, \phi_n(\vec{x})) = 0$, але $H(\psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_n(\vec{x})) \neq 0$.

Визначення 2.10. («Внутрішнє» визначення ендоморфізму рангу m .) Ендоморфізм $\psi: A \rightarrow A$ має ранг m , якщо максимум довжин усіх ланцюгів ендоморфізмів A виду

$$(2.1) \quad \psi \overset{<}{\underset{\sim}{\psi}} \psi_{m-1} \overset{<}{\underset{\sim}{\psi}} \dots \overset{<}{\underset{\sim}{\psi}} \psi_1 \overset{<}{\underset{\sim}{\psi}} \psi_0 ,$$

дорівнює t . Якщо немає ендоморфізму ψ такого, що $\psi \preceq \psi_0$, то ψ має ранг 0.

Зауваження 2.11. Якщо $rk(\varphi) = 0$, тоді зображення φ є основним полем. Визначення ендоморфізмів рангу 0 і 1 для асоціативної комутативної алгебри відповідають визначенню для вільної асоціативної алгебри. Внутрішнє визначення рангу 0 досить схоже.

Твердження 2.12. Визначення 2.10. і 2.5. еквівалентні.

Ми передусім доведемо це твердження кількома лемами. Позначимо через A_K^n n -вимірний афінний простір над алгебраїчним замиканням \bar{K} поля K . Зрозуміло, що $A_K^n \simeq \text{Spec} K[x_1, \dots, x_n]$, де $\text{Spec} K[x_1, \dots, x_n]$ — множина всіх максимальних ідеалів. Дослідимо алгебро-геометричні властивості поліноміальних ендоморфізмів $K[x_1, \dots, x_n]$ та їх відношення до поліноміальних відображень A_K^n у себе.

Кожен ендоморфізм $\varphi: K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K[x_1, \dots, x_n]$ такий, що $\varphi(x_i) = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, де $\varphi_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$, визначає поліноміальне відображення $\varphi^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): A_K^n \rightarrow A_K^n$ афінного простору K в себе виду

$$(2.2) \quad (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n))$$

Вірно і зворотне: кожному поліноміальному відображенню $\varphi^*: A_K^n \rightarrow A_K^n$ виду (2.2) відповідає вищезгаданому ендоморфізму φ алгебри $K[x_1, \dots, x_n]$. Нижче ми скористаємося цим відношенням.

Позначимо $K[M_\varphi]$ різновид $\varphi^*(A_K^n)$. Скажемо, що множина M_φ відповідає ендоморфізму φ поліноміальної алгебри $K[x_1, \dots, x_n]$. Координатне кільце $K[M_\varphi]$ множини M_φ дорівнює $K[M_\varphi] = K[x_1, \dots, x_n]/I$, де

$$I = \{H(x_1, \dots, x_n) \mid H(\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_n(\vec{x})) = 0\}$$

є ідеалом в $K[x_1, \dots, x_n]$, що відповідає множині M_φ . Зрозуміло, що

$$K[M_\varphi] \simeq K[\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_n(\vec{x})] \text{ і } \dim M_\varphi = \text{trdeg} K[\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_n(\vec{x})].$$

Лема 2.13. *Варіація M_φ є незвідною.*

Доведення. Оскільки афінний многовид A_K^n , що відповідає алгебрі $K[x_1, \dots, x_n]$, є незвідним і образ незвідного алгебраїчного многовиду також є незвідним, множина M_φ є незвідною. Підказка: координатне кільце зображення, ізоморфне підкільцю координатного кільця прообразу, отже, немає дільників нуля.

Лема 2.14. *Нехай ϕ_1, ϕ_2 — ендоморфізми $K[x_1, \dots, x_n]$ і M_{ϕ_1}, M_{ϕ_2} — два відповідних різновиди відповідно. Справедливі наступні властивості:*

(1) *Якщо $\phi_1 \sim \phi_2$, тоді $M_{\phi_1} \cong M_{\phi_2}$ і відповідні координатні кільця ізоморфні.*

(2) *$\phi_1 \leq \phi_2$ тоді і тільки тоді, коли кільце координат M_{ϕ_1} є власним кільцем координатного кільця M_{ϕ_2} . У цьому випадку $\dim M_{\phi_2} \leq \dim M_{\phi_1}$, де $\dim X$ — розмірність Круля множини X . Якщо власне кільце правильне, то нерівність є строгою.*

Доведення.

(1) Згідно з пунктом (3) Лема 2.9., координатні кільця многовидів M_{ϕ_1} і M_{ϕ_2} ізоморфні. Тому перераховані вище різновиди самі по собі ізоморфні.

(2) Згідно з пунктом (2) Лема 2.9, координатне кільце різновиду M_{ϕ_1} є власним кільцем координатного кільця різновиду M_{ϕ_2} за деяким його ідеалом. Як наслідок, $\dim M_{\phi_1} \leq \dim M_{\phi_2}$.

Нехай ψ — ендоморфізм $K[x_1, \dots, x_n]$ «зовнішнього» рангу m . Остання лема показує, що не існує ланцюжків ендоморфізмів ψ_i виду (2.1) довжиною більше m , починаючи з ψ . Це означає, що внутрішній ранг ψ менше або дорівнює зовнішньому його рангу. Для того, щоб довести твердження 2.12., нам потрібно встановити протилежну нерівність, тобто довести, що існує ланцюг (2.1) довжиною m , що починається з ψ .

Лема 2.15. Нехай $\dim M_\varphi = m$. Тоді існує ендоморфізм φ' на $K[x_1, \dots, x_n]$ такий, що $\varphi' < \varphi$ і $\dim M_{\varphi'} = m - 1$.

Твердження цієї леми очевидне для $m = 1$: в даному випадку досить розглянути відображення $x_i \rightarrow \varepsilon_i, \varepsilon_i \in K$, в основне поле K . Тепер переходимо до загального випадку. Нам потрібна наступна лема

Лема 2.16. Нехай R — підалгебра $K[x_1, \dots, x_n]$ ступеня трансцендентності m ($m \leq n$). Потім існує вбудовування з R в $K[x_1, \dots, x_n]$.

Доведення. Відомо, що будь-яка база трансцендентності підалгебри A алгебри B може бути розширена до бази трансцендентності алгебри B . Нехай y_1, \dots, y_m — база трансцендентності R . Ми можемо завершити цю базу до бази $y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_{n-m} \in K[x_1, \dots, x_n]$. Зрозуміло, що елементи z_1, \dots, z_{n-m} є алгебраїчно незалежними над R і вони породжують підалгебру $R[z_1, \dots, z_{n-m}]$ та $K[x_1, \dots, x_n]$. Таким чином, афінна область цілісності $R[z_1, \dots, z_{n-m}]$ може бути вкладена в афінну область цілісності $K[x_1, \dots, x_m]$ $[x_1, \dots, x_{n-m}]$.

Однак відомо, що якщо A і B є двома доменами такими, що $A[x_1, \dots, x_s]$ можуть бути вбудовані в $B[x_1, \dots, x_s]$, то A може бути вбудований в B . Таким чином, R може бути вбудований в поліноміальну алгебру $K[x_1, \dots, x_m]$.

Тепер, за допомогою Леми 2.16. можна припустити, що многочлени $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, що визначають відображення φ , належать $K[x_1, \dots, x_m]$ і $\text{treg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = m, m \leq n$.

Лема 2.17. Нехай $\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)$, де $n \geq m$, — множина многочленів з $K[x_1, \dots, x_m]$, що породжує підалгебру $K[x_1, \dots, x_n]$ ступеня трансцендентності m . Тоді для будь-якої спеціалізації $x_m \rightarrow \varepsilon, \varepsilon \in K$, за винятком скінченної множини значень $\varepsilon \in K$, алгебра $K[\varphi_1(x_1, \dots, x_{m-1}, \varepsilon), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_{m-1}, \varepsilon)]$ має ступінь трансцендентності $m - 1$.

Доведення. Без втрати загальності досить розглянути випадок, коли K є алгебраїчно замкнутим полем (тензорування над алгебраїчним замиканням, якщо це необхідно). Розглянемо відображення $\Phi: A_K^m \rightarrow A_K^{n+1}$ таке, що $\Phi(\vec{x}) = (\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_n(\vec{x}), x_m)$ де $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Позначимо через M образ Φ . Оскільки $\text{treg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = m$ і розмірність зображення Φ не більше m , маємо $M = m$. Тепер розглянемо проєкцію $\pi: A_K^{n+1} \rightarrow A_K^1$ таку, що $\pi(z_1, \dots, z_n, x_m) = x_m$. Позначимо через π_1 обмеження π до M . Зрозуміло, що π_1 є епіморфним відображенням. Далі використовуємо наступну теорему.

Теорема 2.2. *Якщо $f: X \rightarrow Y$ є регулярним відображенням між незвідними многовидами X і $Y: f(X) = Y, \dim X = n, \dim Y = m$, тоді $m \leq n$ і*

$$(1) \dim f^{-1}(y) \geq n - m \text{ для кожної точки } y \in Y.$$

(2) *Існує непорожня множина $U \subset Y$ така, що $\dim f^{-1}(y) = n - m$ для всіх $y \in U$.*

У нашому випадку $Y = A_K^1, \dim Y = 1, \dim X = m$. Тому для всіх точок A_K^1 , крім точок замкнутого многовиду $T A_K^1$, прообраз $\pi^{-1}(\varepsilon)$ має розмірність $m - 1$. Тому

$$\text{treg}_K[P_1(x_1, \dots, x_{m-1}, \varepsilon), \dots, P_n(x_1, \dots, x_{m-1}, \varepsilon)] = m - 1.$$

за винятком скінченної множини $\varepsilon \in K$. На цьому доведення Лема 2.14 завершується.

Зауваження 2.18. *Доведення Лема 2.15. негайно випливає з наведеної вище Лема у випадку нескінченного поля. Дійсно, якщо поле K нескінченне, за допомогою Лема 2.17. ми можемо вибрати $\varepsilon \in K$ таким чином, що $\varphi'_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, \varepsilon)$ і $\text{treg}_K[\varphi'_1(\vec{x}), \dots, \varphi'_n(\vec{x})] = m - 1$. Як наслідок, маємо $\dim M_{\varphi'} = k - 1$, де $\varphi' = (\varphi'_1, \dots, \varphi'_n)$. Отже, наша Лема 2.15. доведена у випадку нескінченного поля. Це дає опис групи $\text{Aut}(\text{End}(K[x_1, \dots, x_n]))$ для випадку нескінченного основного поля K .*

Однак, у випадку скінченного основного поля не може бути таких малих стрибків від φ_i до φ'_i , таких, що $\dim M_{\varphi'} = \dim M_{\varphi} - 1$, для будь-якої спеціалізації змінних в основне поле K .

Приклад 2.19. Нехай $|K| = q$ і $\varphi_i = \prod_{k=1}^n (x_k^q - x_k)$. Очевидно, що $\text{treg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = n$. Однак будь-яка спеціалізація φ_i виду: $x_n \rightarrow \varepsilon, \varepsilon \in K$, дає нам $\varphi'_i = 0$.

Якщо поле K є скінченним замість спеціалізацій x_n в основному полі, ми розглядаємо підстановки на многочлени залежно від інших змінних, зокрема, від степенів інших змінних. Нам потрібно наступне

Теорема 2.3. Нехай $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \in$ алгебраїчними над $K[x_1, \dots, x_m]$, многочлени $Q_i(\vec{t}, \vec{x}, \vec{\varepsilon}), i = 1, \dots, n$, є алгебраїчно незалежними для деякого значення множини параметра $\vec{t}(t_1, \dots, t_n)$ у деякому розширеному полі k_1 основного поля k . Тоді існують многочлени $R_i \in \Phi[x_1], i = 1, 2, \dots, r, \vec{R} = (R_1, \dots, R_r)$ такі, що множина многочленів

$$\{Q_1(\vec{t}, \vec{x}, \vec{\varepsilon}), \dots, Q_n(\vec{t}, \vec{x}, \vec{\varepsilon})\}$$

є алгебраїчно незалежною. Причому, якщо зростання послідовності

$$n_1 \ll n_2 \ll \dots \ll n_r$$

досить велике, можна припустити, що $R_i = x_1^{n_i}$. Наведене вище твердження все ще справедливе, якщо замінити " $k[x_1, \dots, x_m]$ " на " $k(x_1, \dots, x_m)$ " і "многочлен" для раціональної функції. У цьому випадку можна поставити $R_i = x_1^{-n_i}$.

Замість x_1 можна взяти будь-яку іншу змінну x_i ; $\Phi = \mathbb{Z}_p$, якщо $\text{char} K = p$ і $\Phi = \mathbb{Z}$, якщо $\text{char} K = 0$. Ми використовуємо окремий випадок цієї теореми для $r = 1$ і $s = 0$, тобто варіант цієї теореми без ε_i . Наступне твердження також необхідне для доведення Лема 2.15. у випадку скінченного основного поля K .

Твердження 2.20. Нехай $Q_1(x_1, \dots, x_m), \dots, Q_n(x_1, \dots, x_m)$ — множина многочленів з $K[x_1, \dots, x_m]$, $|K|$, а ступінь трансцендентності алгебри

$$K[Q_1(x_1, \dots, x_m), \dots, Q_n(x_1, \dots, x_m)]$$

дорівнює m , де $m > 1$, а $m \leq n$. Якщо $r \in N$ досить велике, то

$$\text{trdeg}(K[Q_1(x_1, \dots, x_1^r), \dots, Q_n(x_1, \dots, x_1^r)]) = m - 1.$$

Доведення. Позначимо $A = K[Q_1(x_1, \dots, x_{m-1}, x_1^r), \dots, Q_n(x_1, \dots, x_{m-1}, x_1^r)]$

Зрозуміло, що $A \subseteq K[x_1, \dots, x_{m-1}]$, тобто $\text{trdeg}(A) \leq m - 1$. Треба довести, що протилежна нерівність виконується і для досить великого r . Оскільки

$$\text{trdeg}(K[Q_1(x_1, \dots, x_m), \dots, Q_n(x_1, \dots, x_m)]) = m$$

ми можемо вибрати m алгебраїчно незалежних многочленів з Q_i . Без втрати загальності, ми можемо встановити, що ці многочлени дорівнюють Q_1, \dots, Q_m . За лемою 2.17. існує $\eta \in \bar{K}$, де \bar{K} — алгебраїчне замикання поля K , таке, що

$$\text{trdeg}(\bar{K}[Q_1(x_1, \dots, x_{m-1}, \eta), \dots, Q_n(x_1, \dots, x_{m-1}, \eta)]) = m - 1.$$

Без втрати загальності, можна припустити, що перші $m - 1$ многочлени $Q_i(x_1, \dots, x_{m-1}, \eta)$, $1 \leq i \leq m - 1$, є алгебраїчно незалежними над \bar{K} . Згідно з теоремою 2.3., існує натуральне r_0 , таке, що многочлени

$$Q_1(x_1, \dots, x_{m-1}, x^r), \dots, Q_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-1}, x^r)$$

є алгебраїчно незалежними над K для будь-якого $r \geq r_0$. Оскільки розмірність підкільця $K[Q_1(x_1, \dots, x_{m-1}, x^r), \dots, Q_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-1}, x^r)]$ не менша за розмірність його підкільця $K[Q_1(x_1, \dots, x_{m-1}, x^r), \dots, Q_n(x_1, \dots, x_{m-1}, x^r)]$, доведення є повним.

Ми підсумовуємо наші результати в наступному твердженні

Твердження 2.21. Нехай $\varphi = (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n))$ — ендоморфізм $K[x_1, \dots, x_n]$ «внутрішнього» рангу m . Тоді існує ендоморфізм

$$\psi = (\psi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_m)), \psi_i(x_1, \dots, x_m) \in K[x_1, \dots, x_m],$$

такий, що $\varphi \sim \psi$. Крім того, ендоморфізм

$$\psi'_{(r)} = (\psi_1(x_1, \dots, x_{m-1}, x_1^r), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_{m-1}, x_1^r))$$

має ранг не більше $m - 1$ для будь-якого $r \in N$. Крім того, існує $r_0 \in N$ таке, що для всіх $r \geq r_0$ виконується: $\psi'_{(r)} < \psi$. Як наслідок, $\psi'_{(r)} < \varphi$ і «внутрішній» ранг $\psi'_{(r)}$ дорівнює $m - 1$ для всіх $r \geq r_0$.

З цим твердженням доведення Лема 2.15. є очевидним. Тепер ми готові довести Твердження 2.12.

Доведення Твердження 2.12. Припустимо, що φ має «внутрішній» ранг m , тобто існує максимальний ланцюг довжини m , що починається з φ :

$$(2.3) \quad \varphi \preceq \varphi_{m-1} \preceq \dots \preceq \varphi_1 < \varphi_0,$$

У нас є спадний ланцюжок відповідних сортів M_{φ_i} :

$$(2.4) \quad M_{\varphi_0} \subseteq M_{\varphi_1} \subseteq \dots \subseteq M_{\varphi_{m-1}} \subseteq M_{\varphi}$$

Аргумент індукції про довжину m ланцюга (2, 4) приводить нас до випадку $m = 0$, для якого наше твердження очевидно. Тому «зовнішній» ранг φ також дорівнює m .

І навпаки, нехай ендоморфізм φ може бути «зовнішнього» рангу m , тобто $\text{trdeg} \text{Im} \varphi = m$. За Лемою 2.15. існує ендоморфізм $\psi_{m-1} \in K[x_1, \dots, x_n]$ такий, що $\psi_{m-1} < \varphi$ і $\dim M_{\varphi_{m-1}} = m - 1$. Таким же чином можна побудувати ланцюжок виду (2.3), що починається з φ . Зрозуміло, що цей ланцюг має довжину m . Оскільки ланцюг (2.1) інваріантний при автоморфізмах $\text{End} K[x_1, \dots, x_n]$, маємо

Наслідок 2.22. [8] Нехай $\Phi \in \text{Aut}(\text{End}(A))$, $\psi \in \text{End}(A)$, $\text{rk}(\psi) = m$. Тоді $\text{rk}(\Phi(\psi)) = m$.

2.5. Квазівнутрішні ендоморфізми

У цьому підрозділі розглянемо поняття напівлінійного гомоморфізму, квазівнутрішнього ендоморфізму та напіввнутрішнього автоморфізму. Нам знадобиться наступне поняття.

Визначення 2.23. Нехай A_1 і A_2 — алгебри над K з множини A , δ — автоморфізм K і $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$ — кільцевий гомоморфізм цих алгебр. Пара (δ, φ) називається напівлінійним гомоморфізмом від A_1 до A_2 , якщо виконується умова

$$\varphi(\alpha \cdot u) = \delta(\alpha) \cdot \varphi(u), \text{ для всіх } \alpha \in K, \text{ для всіх } u \in A_1.$$

Визначення 2.24. Автоморфізм Φ напівгрупи $\text{End } A$ ендоморфізмів A називається квазівнутрішнім, якщо існує приєднана бієкція $s: A \rightarrow A$ така, що $\Phi(v) = sv s^{-1}$, для будь-якого $v \in \text{End } A$.

Визначення 2.25. Квазівнутрішній автоморфізм Φ на $\text{End } A$ називається напіввнутрішнім, якщо існує автоморфізм поля $\delta: K \rightarrow K$ такий, що (δ, s) є напівлінійним автоморфізмом A , тобто для будь-якого $\alpha \in K$ та $a, b \in A$ виконуються такі умови:

1. $s(a + b) = s(a) + s(b)$,
2. $s(a \cdot b) = s(a) \cdot s(b)$,
3. $s(\alpha a) = \delta(\alpha)s(a)$.

Ми говоримо, що пара (δ, s) визначає напіввнутрішній автоморфізм Φ з A з суміжним кільцевим автоморфізмом s . Якщо δ є одиничним автоморфізмом K , ми називаємо автоморфізм Φ внутрішнім.

Опис квазівнутрішніх автоморфізмів $\text{End } A$ виглядає наступним чином.

Твердження 2.26. Нехай $\Phi \in \text{Aut } \text{End } A$ — квазівнутрішній автоморфізм $\text{End } A$. Тоді Φ є напіввнутрішнім автоморфізмом $\text{End } A$. Скористаємося наступним фактом:

Твердження 2.27. Нехай $\Phi \in \text{Aut } \text{End } A$ і E — піднапівгрупа кільця A , породжена $e_{ij}, i, j \in [1, n]$. Елементами напівгрупи $\Phi(E)$ є ендоморфізми Кронекера A в деякій основі $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, тоді і тільки тоді, коли Φ є квазівнутрішнім автоморфізмом $\text{End } A$.

Тепер отримаємо один з головних результатів роботи.

Теорема 2.4. *Кожен автоморфізм групи $\text{AutEnd}A$ є напіввнутрішнім.*

Доведення. Множина ендоморфізмів $C = \{\Phi(e_{ij}) \mid \forall i \in [1, n]\}$ є базовим набором ендоморфізмів A . Існує основа $S = \langle s_k \mid s_k \in A, k \in [1, n] \rangle$ і така, що ендоморфізми $\Phi(e_{ij})$ є ендоморфізмами Кронекера в S . Згідно з твердженням [8], отримуємо, що Φ є квазівнутрішнім. В силу твердження [8], кожен автоморфізм групи $\text{AutEnd}A$ є напіввнутрішнім.

Зауваження 2.28. [8]. *Якщо \mathcal{SA} є категорією комутативно-асоціативних алгебр над полем K , ми приймаємо \mathcal{SCA} як категорію, об'єкти якої — всі асоціативні алгебри з категорії \mathcal{A} , а морфізми — всі пари $\psi_\delta = (\psi, \delta): A \rightarrow B, A, B \in \text{Ob}\mathcal{SA}$, такі, що $\psi: A \rightarrow B$ є кільцевими гомоморфізмами від A до B , $\delta: K \rightarrow K$ — автоморфізми поля K і $\psi_\delta(\lambda a) = \lambda^\delta \psi(a), a \in A$. Морфізми ψ_δ категорії \mathcal{SA} називаються напівлінійними гомоморфізмами (або напівгомоморфізмами) від A до B (див. Визначення 2.30). Позначимо через $\text{SEnd}A$ напівгрупу напівендоморфізмів A зі звичайним складом відношень категорії \mathcal{SCA} . Зрозуміло, що визначення ендоморфізмів рангу один і нуля можна перенести в категорію \mathcal{SCA} . Як наслідок, ми отримуємо наступне: кожен автоморфізм групи $\text{AutSEnd}A$ є напіввнутрішнім.*

Висновки до розділу 2

У першому підрозділі було розглянуто скінченні прості графи, введено поняття слабкого ендоморфізму графів.

У другому підрозділі визначено формулу для знаходження найкоротшого шляху для слабких ендоморфізмів на тривимірній квадратній решітці.

У третьому підрозділі наведено алгоритм чисел слабких ендоморфізмів на шляхах за допомогою тривимірної квадратної решітки і тривимірної квадратної решітки r -сходів. Представлено теорему, в якій надано дві формули розширення ендоморфізмів до гомоморфізмів з контурів.

Нарешті, в останньому підрозділі другого розділу, введено поняття «зовнішнього» і «внутрішнього» рангу ендоморфізму φ алгебри A , доведено, що ендоморфізми φ_1 і φ_2 з A є φ -еквівалентними, якщо $\varphi\varphi_1 = \varphi\varphi_2$. Доведено, що не існує ланцюжків ендоморфізмів ψ_i виду $\psi \stackrel{<}{\sim} \psi_{m-1} \stackrel{<}{\sim} \dots \stackrel{<}{\sim} \psi_1 \stackrel{<}{\sim} \psi_0$ довжиною більше m , а отже внутрішній ранг ψ менше або дорівнює зовнішньому його рангу.

Розділ 3. Ендотипи графів

Розглянемо скінченні прості графи G з множиною вершин $V(G)$ і множиною ребер $E(G)$. Нехай $f: V(G) \rightarrow V(G)$ відображення. Для зручності нагадаємо визначення основних типів ендоморфізмів графа G . По-перше, відображення f називається ендоморфізмом, якщо f зберігає ребра, тобто $\{u, v\} \in E(G)$ індукує $\{f(u), f(v)\} \in E(G)$. Крім того, ендоморфізм f називається *напівсильним* ендоморфізмом, якщо $\{f(u), f(v)\} \in E(G)$ означає, що існує $x \in f^{-1}(f(u))$ прообразу $f(u)$ та $y \in f^{-1}(f(v))$, прообрази $f(v)$, такі, що $\{x, y\} \in E(G)$.

3.1. Поняття ендотипу

Ендоморфізм f називається *локальносильним* ендоморфізмом, якщо $\{f(u), f(v)\} \in E(G)$ означає, що для кожного $x \in f^{-1}(f(u))$ існує $y \in f^{-1}(f(v))$ такий, що $\{x, y\} \in E(G)$, і аналогічно для кожного $y \in f^{-1}(f(v))$.

Ендоморфізм f називається *квазісильним* ендоморфізмом, якщо $\{f(u), f(v)\} \in E(G)$ означає, що існує $x \in f^{-1}(f(u))$ такий, що $\{x, y\} \in E(G)$ для всіх $y \in f^{-1}(f(v))$, і аналогічно для прообразів $f(v)$.

Ендоморфізм f називається *сильним* ендоморфізмом, якщо $\{f(u), f(v)\} \in E(G)$ означає $\{x, y\} \in E(G)$. Нарешті, ендоморфізм f називається *автоморфізмом*, якщо f є бієктивним, а f^{-1} є ендоморфізмом. У даній роботі використовуються наступні позначення:

- $End(G)$, множина всіх ендоморфізмів G ,
- $HEnd(G)$, множина всіх напівсильних ендоморфізмів G ,
- $LEnd(G)$, множина всіх локальносильних ендоморфізмів G ,
- $QEnd(G)$, множина всіх квазісильних ендоморфізмів G ,
- $SEnd(G)$, множина всіх сильних ендоморфізмів G ,
- $Aut(G)$, множина всіх автоморфізмів G .

Тепер ми отримуємо, що $End(G) \supseteq HEnd(G) \supseteq LEnd(G) \supseteq QEnd(G) \supseteq SEnd(G) \supseteq Aut(G)$. З цією послідовністю ми пов'язуємо послідовність відповідних кардинальностей за допомогою $Endspek(G) = (|End(G)|, |HEnd(G)|, |LEnd(G)|, |QEnd(G)|, |SEnd(G)|, |Aut(G)|)$, і називаємо цей 6-кортеж *спектром ендоморфізму* або *ендоспектром* G .

Ми пов'язуємо з наведеною вище послідовністю 5-кортеж $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ з $s_i \in \{0,1\}, i = 1,2,3,4,5$, де 1 означає \neq , а 0 означає $=$ у відповідній позиції у наведеній вище послідовності, тобто $s_1 = 1$ вказує на те, що $End(G) \neq HEnd(G)$. Ціле число $\sum_{i=1}^5 s_i 2^{i-1}$ називається типом ендоморфізму або ендотипом графа G і позначається ендотипом G .

В принципі, існує 32 можливості, тобто ендотип 0 до ендотипу 31. Ендотип 0 описує невягнуті графи. Ендотип від 0 до 15 описує сонячні втягуючі графи, ендотип 16 описує $E-S$ -невтягнуті графи, які не є невягнутими. У 1992 і 2003 роках, Кнауер і Ботчер, довели, що існує граф G з ендотипом $G = x$, коли дано $x; x \in \{0, \dots, 31\} \setminus \{1, 17\}$. Деяка достатність, які знаходять ендотип деякого сімейства графа G наступним чином:

- У 2001 році Фан знайшов ендотип дводольного графа діаметром 3 і обхватом 6,
- У 2008 році Хоу, Ло і Чен знайшли ендотип доповнення шляху,
- У 2009 році Хоу, Фан і Ло знайшли ендотип узагальнених багатокутників, а
- У 2011 році Ван і Хоу знайшли ендотип графа n -призми.

Нехай G — граф. Число вершин G часто називають порядком G . Степінь вершини u в графі G - це кількість вершин, прилеглих до u і позначається $d_G(u)$ або просто $d(u)$, якщо граф G зрозумілий з контексту. Якщо $d(u) = r$ для кожної вершини u до G , де $0 \leq r \leq n - 1$, тоді G називається r - регулярним графом.

Доповнення графа G з G є таким графом, що $V(\bar{G}) = V(G)$ і $\{u, v\} \in E(\bar{G})$ тоді і тільки тоді, коли $\{u, v\} \notin E(G)$ для будь-якого $u, v \in V(G)$.

Підграф H з G називається індукованим підграфом, якщо для будь-якого $u, v \in V(H)$, $\{u, v\} \in E(G)$ має на увазі $\{u, v\} \in E(H)$. Індукований підграф H з $V(H) = S$ також індукований на $\langle S \rangle$. Нехай G і H — два графи. З'єднання G і H , позначається $G + H$, є графом таким, що $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ та $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{\{u, v\} | u \in V(G), v \in V(H)\}$. Граф з множиною вершин $\{1, \dots, n\}$, таким, що $n \geq 3$, і множиною ребер $\{\{i, i + 1\} | i = 1, \dots, n\} \cup \{1, n\}$ називається циклом C_n [4].

3.2. Ендотипи $(n - 3)$ -регулярних графів порядку n

Нам потрібні результати про описання ендоморфізмів $(n - 3)$ -регулярного графа порядку n для розгляду ендотипу цього графа.

Лема 3.1. *Нехай G — граф порядку $n \geq 3$. Тоді G є $(n - 3)$ регулярним графом тоді і тільки тоді, коли $G = +_{s=1}^{i=1} C_{n_i}$, де $n = n_1 + \dots + n_s$, $s \geq 1$. Зокрема, $s \geq 1$ має на увазі $n \geq 6$.*

Лема 3.2. *Нехай G — $(n - 3)$ регулярний граф порядку n , $f \in \text{End}(G)$ і G містить індукований підграф \bar{C}_{2m+1} . Якщо $f(\bar{C}_{2m+1}) = X$, то $\langle X \rangle \cong \bar{C}_{2m+1}$.*

Нехай $G = \bar{C}_{(2m_1)_1} + \dots + \bar{C}_{(2m_s)_s}$, $(n - 3)$ -регулярний граф порядку n . Множини $O_i = \{1_i, 3_i, \dots, (2m_i - 1)_i\}$ та $E_i = \{2_i, 4_i, \dots, (2m_i)_i\}$. Позначимо, $S_{X_1, X_2, \dots, X_s} = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_s$, де $X_i \in \{O_i, E_i\}$, $1 \leq i \leq s$.

Лема 3.3. *Нехай $G = \bar{C}_{(2m_1)_1} + \dots + \bar{C}_{(2m_s)_s}$ і $f: V(G) \rightarrow V(G)$. Тоді $f \in \text{End}(G)$ тоді і тільки тоді, коли f задовольняє:*

(1) *Якщо $f(x_1) = f(y_1)$ для деяких двох різних елементів $x_i, y_i \in V(\bar{C}_{n_i})$ тоді $y_i = (x - 1)_i$ або $y_i = (x + 1)_i$.*

(2) *$f(S_{O_1, \dots, O_s}) = X_1 \cup \dots \cup X_s$ і $f(S_{E_1, \dots, E_s}) = Y_1 \cup \dots \cup Y_s$ де $X_i, Y_i \in \{O_i, E_i\}$, $1 \leq i \leq s$.*

(3) Якщо $O_i, E_i \in f(G)$ для деякого $1 \leq i \leq s$, то $f(\bar{C}_{(2m_j)_j}) = \bar{C}_{(2m_i)_i}$ і $m_j = m_i$ для деякого $1 \leq i \leq s$ такого, що $f|_{\bar{C}_{(2m_j)_j}} \in \text{ізоморфізм від } \bar{C}_{(2m_j)_j} \text{ до } \bar{C}_{(2m_i)_i}$.

(4) Якщо $f(x_i) = f((x+1)_i)$ для деяких $x_i \in V(\bar{C}_{2m_i})$, то

(4.1) $f(1_i) = f(2_i), f(3_i) = f(4_i), \dots, f((2m_i-1)_i) = f((2m_i)_i)$, якщо x непарне, або

(4.2) $f((2m_i)_i) = f(1_i), f(2_i) = f(3_i), \dots, f((2m_i-2)_i) = f((2m_i-1)_i)$, якщо x парний.

Нехай $f \in \text{End}(G)$, де $G = G_1 + G_2$ граф порядку n , $G_1 = \bar{C}_{(2m_1+1)_1} + \dots + \bar{C}_{(2m_s+1)_s}$, $G_2 = \bar{C}_{(2r_1)_1} + \dots + \bar{C}_{(2r_t)_t}$, $(n-3)$ -регулярний граф порядку n (див. Лема 3.1). З Лем 3.2 і Лем 3.3, $f = (f|_{G_1}, f|_{G_2})$. Далі, нехай $x, y \in f(G)$ такі, що $\{x, y\} \in E(G)$. Легко отримати, що $\{u, v\} \in E(G)$, для всіх $u \in f^{-1}(x)$ і $v \in f^{-1}(y)$, якщо x і y належать до різних доповнень циклів. Тоді ми отримаємо наступну лему.

Лема 3.4. Нехай G — $(n-3)$ -регулярний граф порядку n , $f \in \text{End}(G)$. Якщо $x \in f(G)$, то $1 \leq |f^{-1}(x)| \leq 2$.

Доведення. Нехай $f \in \text{End}(G)$ і $x \in V(G)$ з $|f^{-1}(x)| = 3$. Якщо $f^{-1}(x) = \{u_1, u_2, u_3\}$ то $u_1 = u_2 - 1$ або $u_1 = u_2 + 1$, та $u_1 = u_3 - 1$ або $u_1 = u_3 + 1$, за лемою 2.3 (1). Якщо той чи інший $u_1 = u_2 - 1, u_1 = u_3 - 1$ або $u_1 = u_2 + 1, u_1 = u_3 + 1$, то $u_2 = u_3$, це суперечить припущенню. Якщо той чи інший $u_1 = u_2 - 1, u_1 = u_3 + 1$ або $u_1 = u_2 + 1, u_1 = u_3 - 1$, то $u_2 = u_3 + 2$ або $u_3 = u_2 + 2$, це суперечить Лемі 2.3 (1).

Лема 3.5. Нехай G — $(n-3)$ -регулярний граф порядку n , $f \in \text{End}(G)$, $x, y \in f(G)$ з $f^{-1}(x) = \{u\}$ та $f^{-1}(y) = \{v\}$. Тоді $\{x, y\} \in E(G)$ тоді і тільки тоді, коли $\{u, v\} \in E(G)$.

Доведення. Нехай $f \in \text{End}(G)$. Тоді $f = (f|_{G_1}, f|_{G_2})$, де $G = G_1 + G_2$,
 $G_1 = \bar{C}_{(2m_1+1)_1} + \dots + \bar{C}_{(2m_s+1)_t}$, $G_2 = \bar{C}_{(2r_1)_1} + \dots + \bar{C}_{(2r_t)_t}$.

Припустимо, що $x, y \in f(G)$ і $f^{-1}(x) = \{u\}$, $f^{-1}(y) = \{v\}$ з u, v належать до одного і того ж доповнення циклу, \bar{C}_m . Таким чином, x і y також належать до одного доповнення циклу, \bar{C}_p . Якщо m непарне, тоді $\{x, y\} \in E(G)$ тоді і тільки тоді, коли $\{u, v\} \in E(G)$, за Лемою 2.2. Якщо m парне, то $\{x, y\} \in E(G)$ тоді і тільки тоді, коли $\{u, v\} \in E(G)$, за Лемою 2.3 (3).

Лема 3.6. Нехай G — $(n-3)$ -регулярний граф порядку n , $f \in \text{End}(G)$, $x, y \in f(G)$ з $f^{-1}(x) = \{u_1, u_2\}$ та $f^{-1}(y) = \{v\}$. Тоді $\{x, y\} \in E(G)$ тоді і тільки тоді, коли $\{u_i, v\} \in E(G)$, для всіх $i = 1, 2$.

Доведення. Очевидно, що x і y належать до різних доповнень циклів.

Одним з основних результатів є наступна теорема.

Теорема 3.1. [4] Нехай G — $(n-3)$ -регулярний граф порядку n . Тоді ендотип G ділиться на 4. Зокрема ендотип графа G виглядає наступним чином:

$$(1) \text{ Endotype } G = 0 \left(\text{End}(G) = \text{HEnd}(G) = \text{LEnd}(G) = \text{QEnd}(G) = \text{SEnd}(G) = \text{Aut}(G) \right) \Leftrightarrow G = \bigoplus \bar{C}_{2m+1},$$

$$(2) \text{ Endotype } G = 4 \left(\text{End}(G) = \text{HEnd}(G) = \text{LEnd}(G) \neq \text{QEnd}(G) = \text{SEnd}(G) = \text{Aut}(G) \right) \Leftrightarrow G = \bigoplus \bar{C}_4 + \bigoplus \bar{C}_{2m+1},$$

$$(3) \text{ Endotype } G = 8 \left(\text{End}(G) = \text{HEnd}(G) = \text{LEnd}(G) \neq \text{QEnd}(G) \neq \text{SEnd}(G) = \text{Aut}(G) \right) \Leftrightarrow G = \bigoplus \bar{C}_{2r} + \bigoplus \bar{C}_{2m+1},$$

$$(4) \text{ Endotype } G = 12 \left(\text{End}(G) = \text{HEnd}(G) = \text{LEnd}(G) \neq \text{QEnd}(G) \neq \text{SEnd}(G) = \text{Aut}(G) \right) \Leftrightarrow G = \bigoplus \bar{C}_4 + \bigoplus \bar{C}_{2r} + \bigoplus \bar{C}_{2m+1},$$

$$(5) \text{ Endotype } G = 16 \left(\text{End}(G) = \text{HEnd}(G) = \text{LEnd}(G) = \text{QEnd}(G) = \text{SEnd}(G) \neq \text{Aut}(G) \right) \Leftrightarrow G = \bigoplus \bar{C}_3 + \bigoplus \bar{C}_{2m+1},$$

(6) *Endotype* $G = 20$ ($End(G) = HEnd(G) = LEnd(G) \neq QEnd(G) = SEnd(G) \neq Aut(G)$) $\Leftrightarrow G = \bigoplus \bar{C}_3 + \bigoplus \bar{C}_4 + \bigoplus \bar{C}_{2m+1}$,

(7) *Endotype* $G = 24$ ($End(G) = HEnd(G) = LEnd(G) = QEnd(G) \neq SEnd(G) \neq Aut(G)$) $\Leftrightarrow G = \bigoplus \bar{C}_3 + \bigoplus \bar{C}_{2r} + \bigoplus \bar{C}_{2m+1}$,

(8) *Endotype* $G = 28$ ($End(G) = HEnd(G) = LEnd(G) \neq QEnd(G) \neq SEnd(G) \neq Aut(G)$) $\Leftrightarrow G = \bigoplus \bar{C}_3 + \bigoplus \bar{C}_4 + \bigoplus \bar{C}_{2r} + \bigoplus \bar{C}_{2m+1}$.

Зауважте, ми можемо припустити, що $\bigoplus \bar{C}_{2m+1}$ при (2)-(8) порожні.

Ми завершимо доведення цієї теореми, встановивши наступні положення.

Твердження 3.7. $End(G) = LEnd(G)$.

Доведення. Нехай $f \in End(G)$ з $x, y \in f(G)$ таким, що $\{x, y\} \in E(G)$. Тоді кардинальність $|f^{-1}(x)|$ і $|f^{-1}(y)|$ дорівнює 1 або 2. Якщо $|f^{-1}(x)| = |f^{-1}(y)| = 1$ або $|f^{-1}(x)| = 2, |f^{-1}(y)| = 1$, тоді $\{u, v\} \in E(G)$, для всіх $u \in f^{-1}(x)$ та $v \in f^{-1}(y)$.

Якщо $f^{-1}(x) = \{u_1, u_2\}$ і $f^{-1}(y) = \{v_1, v_2\}$, припустимо, що $u_1 < u_2 < v_1 < v_2$, $u_2 = u_1 + 1, v_2 = v_1 + 1$ і належать до одного доповнення циклу. Відображення має вигляд:

$$f = \begin{pmatrix} \dots & u_1 & u_2 & \dots & v_1 & v_2 & \dots \\ \dots & x & x & \dots & y & y & \dots \end{pmatrix}.$$

Отже, $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\} \in E(G)$. Це показує, що $f \in LEnd(G)$.

Твердження 3.8. $End(G) \neq QEnd(G)$ тоді і тільки тоді, коли G містить індукований підграф \bar{C}_4 .

Доведення. Припустимо, що G не містить індукованого підграфа \bar{C}_4 . Нехай $f \in End(G)$. Ми покажемо, що f квазісильний. Розглянемо тільки випадок $f^{-1}(x) = \{u_1, u_2\}$ і $f^{-1}(y) = \{v_1, v_2\}$, з $u_1 < u_2 < v_1 < v_2$, $u_2 = u_1 + 1, v_2 = v_1 + 1$ і належимо до одного доповнення циклу C_m . З $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\} \in$

$E(G)$, припустимо, що $\{u_1, v_2\} \notin E(G)$,. Таким чином, $u_1 = 1$ і $v_2 = m$. Якщо також $\{u_2, v_1\} \notin E(G)$, то $v_1 = u_2 + 1$. Отже, щоб отримати, що $m = 4$, відображення має вигляд:

$$f = \begin{pmatrix} \dots & u_1 = 1 & u_2 = 2 & v_1 = 3 & v_2 = 4 & \dots \\ \dots & x & x & y & y & \dots \end{pmatrix}.$$

Отже, граф G містить індукований підграф \bar{C}_4 , протиріччя. Тоді $\{u_2, v_1\} \in E(G)$. Аналогічно, ми отримуємо це для прообразів $f(y)$. Таким чином, $f \in QEnd(G)$.

І навпаки, припустимо, що G містить індукований підграф \bar{C}_4 . Визначимо $f \in End(G)$ за допомогою $f|_{G \setminus \bar{C}_4}$ тотожного відображення та

$$f|_{\bar{C}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Легко помітити, що $1, 3 \in f(G)$ з $\{1, 3\} \in E(G)$ такими, що $f^{-1}(1) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(3) = \{3, 4\}$. Але $\{1, 4\}, \{2, 3\} \notin E(G)$, тоді f не є квазісильним.

Твердження 3.9. $QEnd(G) \neq SEnd(G)$ тоді і тільки тоді, коли G містить індукований підграф $\bar{C}_{2r}, r > 2$.

Доведення. Припустимо, що G не містить індукованого підграфа $\bar{C}_{2r}, r > 2$. Таким чином, доповнення парного циклічного індукованого підграфа G дорівнює лише \bar{C}_4 . Нехай $f \in QEnd(G)$. З твердження 3.3, $f|_{\bar{C}_4}$ є рівно 1-1 відображенням. Тому $f \in SEnd(G)$.

І навпаки, припустимо, що G містить індукований підграф $\bar{C}_{2r}, r > 2$. Визначимо $f \in QEnd(G)$ за допомогою $f|_{G \setminus \bar{C}_{2r}}$ та

$$f|_{\bar{C}_{2r}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2r-1 & 2r \\ 1 & 1 & 3 & 3 & \dots & 2r-1 & 2r-1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $1, 3 \in f(G)$ з $\{1, 3\} \in E(G)$ такими, що $f^{-1}(1) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(3) = \{3, 4\}$. Але $\{2, 3\} \notin E(G)$ то f не сильний.

Твердження 3.10.[4] $SEnd(G) \neq Aut(G)$ тоді і тільки тоді, коли G містить індукований підграф \bar{C}_3 .

Доведення. Припустимо, що G не містить індукованого підграфа \bar{C}_3 . Нехай $f \in SEnd(G)$. З Твердження 3.4, $f|_{\bar{C}_{2r}}; , r > 2$ є рівно 1-1 відображенням. Тому $f \in Aut(G)$.

І навпаки, припустимо, що G містить індукований підграф \bar{C}_3 . Визначимо $f \in SEnd(G)$ так, що $f|_{G \setminus \bar{C}_3}$ – тотожне перетворення

$$f|_{\bar{C}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки f не є бієктивним, f не є автоморфізмом [4].

3.3. Ендотипи відношень еквівалентності

Основним поняттям, яке вивчається в цьому підрозділі, є поняття ендотипу реляційної системи. Поняття ендотипу як числової характеристики, що зв'язує множини шести типів ендоморфізмів, було введене М. Боттчером та У. Кнауером у для симетричних бінарних відношень, а пізніше узагальнене А. В. Решетниковим у і для відношень довільної арності. Використовуючи це поняття, можна класифікувати відношення за їх ендотипами відносно ендоморфізмів.

Нехай X – довільна непорожня множина, ρ – бінарне відношення на множині X . Ланцюгу включень

$$Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho)$$

відповідає послідовність $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, де $s_i \in \{0,1\}, i \in \{1, \dots, 5\}$. При цьому $s_i = 0$, якщо на i -тій позиції в наведеній вище послідовності включень множини збігаються, $s_i = 1$ в інших випадках. Наприклад, $s_3 = 0$ означає, що $LEt(\rho) = QEt(\rho)$, а $s_5 = 1$ вказує на $SEt(\rho) \neq At(\rho)$. Значення суми $\sum_{i=1}^5 s_i \cdot 2^{i-1}$ називається ендотипом бінарного відношення ρ відносно його ендотопізмів і позначається через $Ettype(X, \rho)$. Якщо у вказаній вище

послідовності включень множини ендотопізмів замінити на відповідні множини ендоморфізмів, то отримаємо поняття ендотипу $Endotype(X, \rho)$ бінарного відношення ρ відносно його ендоморфізмів.

Теорема 3.2. Для будь-якої еквівалентності α на множині X

$$Ettype(X, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |X| = 1, \\ 4, & \text{якщо } 2 \leq |X| < \infty, \alpha = i_x, \\ 16, & \text{якщо } 2 \leq |X|, \alpha = \omega_x, \\ 20, & \text{якщо } |X| = \infty, \alpha = i_x, \\ 23, & \text{якщо } \alpha \neq i_x, \alpha \neq \omega_x. \end{cases}$$

Доведення. 1) Нехай X – одноелементна множина. Тоді $Eq(X)$ вичерпується тривіальною еквівалентністю $\alpha = i_x = \omega_x$, при цьому очевидно, що $At(\alpha) = Et(\alpha)$ і, як наслідок,

$$Ettype(X, \alpha) = \sum_{i=1}^s 0 \cdot 2^{i-1} = 0.$$

2) Нехай X – скінченна множина, $|X| \geq 2$ і $\alpha = i_x$. За лемами 1.10, 1.11, $(\tau, \sigma) \in At(\alpha)$ для будь-якого $(\tau, \sigma) \in Set(\alpha)$, а тому $At(\alpha) = Set(\alpha)$. Визначимо перетворення τ множини X таким чином: $X\tau = \{a\}, a \in X, (\tau, \tau) \in LEt(\alpha)$ при цьому $(\tau, \tau) \notin LEt(\alpha)$, бо $\tau^* \in \mathfrak{Z}(X/\alpha)$ не є ін'єктивним перетворенням. Отже, $QEt(\alpha) \neq LEt(\alpha)$. Очевидно, що $LEt(\alpha) = Et(\alpha)$, тоді

$$Ettype(X, \alpha) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 4.$$

3) Нехай $\alpha = \omega_x, |X| \geq 2$. У цьому випадку маємо $At(\alpha) = \omega_{S(X)}$ і $SEt(\alpha) = Et(\alpha) = \omega_{\mathfrak{Z}(X)}$. Таким чином, отримуємо

$$Ettype(X, \alpha) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 16.$$

4) Якщо X – нескінченна множина і $\alpha = i_x$, то на відміну від попереднього п. 3) $At(\alpha) \neq SEt(\alpha)$. Приклад відповідного ендотопізму

$(\tau, \sigma) \in SEt(\alpha)/At(\alpha)$ отримуємо при виборі двох різних ін'єкцій $\tau, \sigma \in \mathfrak{Z}(X)$, які не є сюр'єкціями. У цьому випадку

$$Et(\rho) = HEt(\rho) = LEt(\rho) \supset QEt(\rho) = SEt(\rho) \supset At(\rho),$$

отже,

$$Ettype(X, \alpha) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 20.$$

5) Нехай $\alpha \in Eq(X)$ – нетривіальне відношення еквівалентності. Тоді $|X| \geq 3, |X/\alpha| \geq 2$ і у фактор-множині X/α існує принаймні один клас, потужність якого не менше 2, маємо $At(\alpha) \neq SEt(\alpha)$.

Візьмемо різні $a, b \in X$ такі, що $(a, b) \in \alpha$, і визначимо перетворення τ і σ множини X таким чином: $X\tau = \{a\}, X\sigma = \{b\}$, $(\tau, \sigma) \in LEt(\alpha)$, при цьому, як випливає з леми 1.13, $(\tau, \sigma) \notin QEt(\alpha)$.

Тому $QEt(\alpha) \neq LEt(\alpha)$.

Визначимо тепер перетворення τ і σ множини X за формулами:

$$\bar{x}\tau = \begin{cases} \{a, b\}, & \text{якщо } \bar{x} = \bar{a}, \\ \{a\} & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\bar{x}\sigma = \begin{cases} \{a, b\}, & \text{якщо } \bar{x} = \bar{a}, \\ \{b\} & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $\bar{x} \in X/\alpha$, маємо $(\tau, \sigma) \in HEt(\alpha)$ однак $(\tau, \sigma) \notin LEt(\alpha)$, звідси $LEt(\alpha) \neq HEt(\alpha)$.

Нарешті, визначимо $\tau, \sigma \in \mathfrak{Z}(X)$, прийнявши для всіх $\bar{x} \in X/\alpha$

$$\bar{x}\tau = \begin{cases} \{a\}, & \text{якщо } \bar{x} = \bar{a}, \\ \{b\} & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad \bar{x}\sigma = \begin{cases} \{b\}, & \text{якщо } \bar{x} = \bar{a}, \\ \{a\} & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Нехай $(\tau, \sigma) \in Et(\alpha)$, проте, $(\tau, \sigma) \notin HEt(\alpha)$.

Звідси $HEt(\alpha) \neq Et(\alpha)$ і, як наслідок, отримуємо такий ланцюг включень:

$$Et(\alpha) \supset HEt(\alpha) \supset LET(\alpha) \supset QEt(\alpha) = SET(\alpha) \supset At(\alpha)$$

$$\text{Отже, } Etype(X, \alpha) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 23.$$

Нехай X – довільна непорожня множина, $\alpha \in Eq(X)$. Нагадаємо, якщо $f: X \rightarrow X$ – деяке перетворення і $S \subseteq X$, то через $f|_S$ позначається звуження перетворення f на підмножину S .

Лема 3.11. *Перетворення $f \in \mathfrak{F}(X)$ є ендоморфізмом відношення $\alpha \in Eq(X)$ тоді й тільки тоді, коли для кожного класу еквівалентності $A \in X/\alpha$ існує клас $B \in X/\alpha$, такий що $Af \subseteq B$.*

Лема 3.12. (i) *Ендоморфізм $f \in \text{End}(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є напівсильним тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $B \in X/\alpha$, такого що $B \cap \text{im}(f) \neq \emptyset$, і будь-яких $a, b \in B \cap \text{im}(f)$ існує $A \in X/\alpha$, такий що $a, b \in Af$.*

(ii) *Ендоморфізм $f \in \text{End}(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є локально сильним тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $A, B, C \in X/\alpha$ з того, що $Af \subseteq C$ і $Bf \subseteq C$, випливає $Af = Bf$.*

(iii) *Для будь-якого відношення $\alpha \in Eq(X)$ маємо*

$$Q\text{End}(X, \alpha) = S\text{End}(X, \alpha)$$

Лема 3.13. *Ендоморфізм $f \in \text{End}(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є сильним тоді й тільки тоді, коли*

$$\tau^*: \frac{X}{\alpha} \rightarrow \frac{X}{\alpha}: \bar{a} \rightarrow \overline{af}$$

є ін'єктивним перетворенням.

Доведення.

Нагадаємо, що симетричне й транзитивне бінарне відношення ρ , визначене на множині X , називається відношенням часткової еквівалентності на X .

Нехай A – непорожня підмножина множини X , α_A – часткова еквівалентність на X . Ендотопізми довільної часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ описує така лема.

Лема 3.14. (i) Перетворення $f \in \mathfrak{Z}(X)$ є ендоморфізмом часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ тоді й тільки тоді, коли $f|_A \in \text{End}(A, \alpha_A)$.

(ii) Підстановка f множини X є автоморфізмом часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ тоді й тільки тоді, коли $f|_A \in \text{Aut}(A, \alpha_A)$.

(iii) Ендоморфізм f часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є напівсильним ендоморфізмом тоді й тільки тоді, коли для будь-якого класу $B \in A/\alpha_A$ такого, що $B \cap \text{im}(f) \neq \emptyset$, і будь-яких $a, b \in B \cap \text{im}(f)$ існує $Y \in A/\alpha_A$ такий, що $a, b \in Yf$.

(iv) Ендоморфізм f часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є локально сильним ендоморфізмом тоді й тільки тоді, коли $(X \setminus A)f \subseteq X \setminus A$ і $f|_A \in \text{LEnd}(A, \alpha_A)$.

(v) Ендоморфізм f часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є сильним ендоморфізмом тоді й тільки тоді, коли $(X \setminus A)f \subseteq X \setminus A$ і $f|_A \in \text{SEnd}(A, \alpha_A)$.

(vi) Ендоморфізм f часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є квазісильним ендоморфізмом тоді й тільки тоді, коли f – сильний ендоморфізм.

Доведення. Твердження (iii) доводиться аналогічно тому, як лема 2, а решта тверджень (i), (ii), (iv)-(vi) – подібно лемам 3.1 – 3.3 цього підрозділу.

Відзначимо, що з пунктів (v), (vi) леми 3.3 випливає, що

$$\text{QEnd}(X, \alpha_A) = \text{SEnd}(X, \alpha_A) \text{ для будь-якого } \alpha_A \in Eq_A(X).$$

Нехай $A \subset X, \alpha_A \in Eq_A(X)$ – відношення строгої часткової еквівалентності на X .

Класифікацію строгих часткових еквівалентностей за значенням їх ендотипу відносно ендоморфізмів встановлює

Теорема 3.3. *Нехай $A \subset X$ і $A \neq \emptyset$. Для будь-якої строгої часткової еквівалентності*

$$\alpha_A \in \text{Eq}_A(X):$$

$$\text{Endotype}(X, \alpha_A) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } |A| = 1, |X| = 2, \\ 7, & \text{якщо } 2 \leq |A| < \infty, |X \setminus A| = 1, \alpha_A = i_A, \\ 18, & \text{якщо } |A| = 1, 2 < |X|, \\ 19, & \text{якщо } 2 \leq |A|, \alpha_A = \omega_A, \\ 23, & \text{якщо } 2 \leq |A| < \infty, i_A \neq \alpha_A \neq \omega_A \text{ або} \\ & 2 \leq |A| < \infty, 1 < |X \setminus A|, \alpha_A = i_A \text{ або} \\ & |A| = \infty, \alpha_A \neq \omega_A. \end{cases}$$

Доведення. 1) Нехай $|X| = 2, A \subset X$ – одноелементна підмножина. Тоді $\text{Eq}_A(X)$ вичерпується еквівалентністю $\alpha_A = i_A = \omega_A$, при цьому, як випливає з леми 2.12, $\text{End}(X, \alpha_A) = \text{HEnd}(X, \alpha_A)$ і потужність цих множин дорівнює 2, а $\text{LEnd}(X, \alpha_A) = \text{Aut}(X, \alpha_A)$ з потужністю 1, отже,

$$\text{Endotype}(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 2.$$

2) Нехай $A \subset X$ – скінченна множина, що містить не менше двох елементів, $|X \setminus A| = 1$, α_A – тотожне відношення. Візьмемо різні $a, b \in A$ і визначимо перетворення f множини X таким чином:

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ b, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$. Неважко переконатися, що $f \in \text{End}(X, \alpha_A)$, проте $f \notin \text{HEnd}(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 2.12. Аналогічно можна показати, що $\text{HEnd}(X, \alpha_A) \neq \text{LEnd}(X, \alpha_A) \neq \text{QEnd}(X, \alpha_A)$. Справді, визначивши $f: X \rightarrow X$ як

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A \setminus \{b\}, \\ b, & \text{якщо } x \in \{b\} \cup X \setminus A \end{cases}$$

для різних $a, b \in A$, дійдемо до $f \in \text{HEnd}(X, \alpha_A) \setminus \text{LEnd}(X, \alpha_A)$.

Визначивши перетворення f множини X за формулою

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ x, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

отримаємо приклад $f \in LEnd(X, \alpha_A) \setminus QEnd(X, \alpha_A)$. Оскільки $|X \setminus A| = 1$, $\alpha_A = i_A$ і A – скінченна множина, то за лемою [11], п. (ii) і лемою [11], п. (v), $f \in Aut(X, \alpha_A)$ для будь-якого $f \in SEnd(X, \alpha_A)$, тому $Aut(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$. Відтак,

$$\begin{aligned} End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) &= SEnd(X, \alpha_A) \\ &= Aut(X, \alpha_A) \end{aligned}$$

Отже,

$$Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 7.$$

3) Нехай $A = \{a\}$, X – множина, що містить більше двох елементів. Як і в п. 1), $Eq_A(X)$ вичерпується еквівалентністю $\alpha_A = i_A = \omega_A$, при цьому для ендоморфізму f будь-якого типу очевидно, що $af = a$. За п. (iii) леми [11], $f \in HEnd(X, \alpha_A)$ для будь-якого $f \in End(X, \alpha_A)$, тому $HEnd(X, \alpha_A) = End(X, \alpha_A)$.

Умови пунктів (iv)-(vi) леми 3.4 у цьому випадку визначають один і той же ендоморфізм, не обов'язково бієктивний, тому $LEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$ і $SEnd(X, \alpha_A) \neq Aut(X, \alpha_A)$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} End(X, \alpha_A) &= HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) = QEnd(X, \alpha_A) = \\ &= SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A), \end{aligned}$$

отже,

$$Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 18.$$

4) Нехай A – множина, що містить не менше двох елементів і α_A – універсальне відношення. Візьмемо різні $a, b \in A$ і визначимо перетворення $f: X \rightarrow X$ за формулою:

$$xf = \begin{cases} a, \text{ якщо } x \in A, \\ b, \text{ якщо } x \notin A \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$. За лемою 2.11 і п. (i) леми 3.12, $f \in \text{End}(X, \alpha_A)$, але $f \notin \text{HEnd}(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 3.4. Якщо $Xf = \{a\}$, матимемо $f \in \text{HEnd}(X, \alpha_A) \setminus \text{LEnd}(X, \alpha_A)$. Оскільки $|A \setminus \alpha_A| = 1$, умови пунктів (iv)-(vi) леми 3.4 визначають один і той самий не обов'язково бієктивний ендоморфізм, тому $\text{LEnd}(X, \alpha_A) = \text{SEnd}(X, \alpha_A)$ і $\text{SEnd}(X, \alpha_A) \neq \text{Aut}(X, \alpha_A)$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} \text{End}(X, \alpha_A) \supset \text{HEnd}(X, \alpha_A) \supset \text{LEnd}(X, \alpha_A) = \text{QEnd}(X, \alpha_A) = \text{SEnd}(X, \alpha_A) \\ \supset \text{Aut}(X, \alpha_A), \end{aligned}$$

отже,

$$\text{Endotype}(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 19.$$

5) а). Нехай A – скінченна множина, що містить не менше двох елементів, $i\alpha_A \neq i_A, \alpha_A \neq \omega_A$. Тоді $|A| \geq 3$, $|A \setminus \alpha_A| \geq 2$ і в $A \setminus \alpha_A$ існує принаймні один клас, потужність якого не менше 2. Позначимо його через B . Візьмемо різні $a, b \in B$, $a \in \alpha_A$ і визначимо перетворення $f: X \rightarrow X$, прийнявши

$$xf = \begin{cases} a, \text{ якщо } x \in A, \\ b, \text{ якщо } x \notin A \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$. Неважко переконатися, що $f \in \text{End}(X, \alpha_A)$, але $f \notin \text{HEnd}(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 3.12. Якщо $Xf = \{a\}$, будемо мати приклад $f \in \text{HEnd}(X, \alpha_A) \setminus \text{LEnd}(X, \alpha_A)$.

Визначимо тепер перетворення f множини X , прийнявши

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ x, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

для всіх $x \in X$. За пунктами (iv) та (v) леми 3.4, $f \in LEnd(X, \alpha_A)$, проте $f \notin SEnd(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (v) леми 3.4. Звідси $SEnd(X, \alpha_A) \neq LEnd(X, \alpha_A)$. Нерівність $Aut(X, \alpha_A) \neq SEnd(X, \alpha_A)$ є очевидною. Отже,

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A) \\ \supset Aut(X, \alpha_A)$$

$$\text{і } Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 19.$$

b) Нехай A – скінченна непорожня множина з $A \geq 2, |X \setminus A| > 1$ і $\alpha_A = i_A$.

Ланцюг включень

$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$ доводиться аналогічно тому, як у п. 2) доведення цієї теореми. Оскільки множина $X \setminus A$ містить не менше двох елементів, то виберемо в ній довільний елемент a і визначимо перетворення f множини X таким чином:

$$xf = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A, \\ a, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

для будь-якого $x \in X$. Зрозуміло, що $f \in SEnd(X, \alpha_A) \setminus Aut(X, \alpha_A)$ і, як результат, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 23$.

с) Нехай A – нескінченна множина і $\alpha_A \neq \omega_A$. Розглянемо випадок, коли $\alpha_A = i_A$. Оскільки множина A нескінченна, на відміну від пункту 2), маємо $SEnd(X, \alpha_A) \neq Aut(X, \alpha_A)$. Приклад ендоморфізму $f \in SEnd(X, \alpha_A) \setminus Aut(X, \alpha_A)$ отримуємо при виборі на звуженні $f|_A$ ін'єкції, яка не є сюр'єкцією. У цьому випадку

$$\begin{aligned} \text{End}(X, \alpha_A) \supset \text{HEnd}(X, \alpha_A) \supset \text{LEnd}(X, \alpha_A) \supset \text{QEnd}(X, \alpha_A) = \\ = \text{SEnd}(X, \alpha_A) \supset \text{Aut}(X, \alpha_A). \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \text{Endotype}(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^s s_i \cdot 2^{i-1} = 23.$$

Якщо ж $\alpha_A \neq i_A$, $\alpha_A \neq \omega_A$, то, міркуючи аналогічно тому, як у п. 5) а), приходимо до $\text{Endotype}(X, \alpha_A) = 23$. Теорему доведено.

Отож, усі можливі значення ендотипу довільного відношення еквівалентності, і всі можливі значення ендотипу довільного строгого часткового відношення еквівалентності, отримані в теоремі 2.13, дають повну класифікацію всіх часткових еквівалентностей α_A , $A \subseteq X$, за їх ендотипами відносно ендоморфізмів [3, 6].

Висновки до розділу 3

В першому підрозділі третього розділу визначено поняття ендотипу відносно його ендотопізмів, наведено деякі результати про ендотипи графів.

В другому підрозділі розглянуто теорему про опис всіх ендотипів $(n - 3)$ -регулярних графів порядку n .

В останньому підрозділі розглянуті ендотипи відношень еквівалентності на довільній множині. Показано, що можливими значеннями ендотипу відношення еквівалентності можуть бути лише числа 0, 4, 16, 20 і 23.

Висновки

У магістерській роботі було досліджено алгебраїчні властивості графів за допомогою напівгруп ендоморфізмів.

Розглянуто застосування методу класифікації графів за значенням їх ендотипу відносно ендоморфізмів на прикладі різних класів графів: часткові відношення еквівалентності, графи шляху, регулярні графи [3-5]. Досліджено класифікацію всіх відношень еквівалентності за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів. Крім того, в якості узагальнення поняття ендоморфізму вивчено слабкі ендоморфізми графів, схарактеризовано кількість всіх слабких ендоморфізмів на скінченних шляхах [4].

Зокрема, вивчено результати У. Кнауера та Н. Піпаттанаджінда про кількість слабких ендоморфізмів на скінченних шляхах, А. Бєлова-Канеля та Р. Ліплянського про автоморфізми напівгруп ендоморфізмів вільної комутативної алгебри. Також досліджено класифікаційні результати Ю.В.Жучка та О.О.Тоїчкіної про ендотипи часткових відношень еквівалентності.

Список літератури

1. Böttcher M. Endomorphism spectra of graphs / M. Böttcher, U. Knauer // Discrete Math. – 1992. – Vol. 109. – P. 45 – 57.
2. Шевченко М.С. Методи дослідження графів з допомогою перетворень/М.С. Шевченко//Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2023 Форум молодих дослідників»: матеріали IV Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (17 листопада 2023., м.Суми) – Суми : [СумДПУ імені А.С.Макаренка], 2023. – с.120.
3. Тоїчкіна О. О. Ендотипи деяких часткових відношень еквівалентності/ О. О. Тоїчкіна // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2017. – Вип. 31, № 2. – С. 122 – 128.
4. Pipattanajinda N. The endotype of $(n - 3)$ -regular graphs of order n / N. Pipattanajinda // Southeast Asian Bull. Math. – 2014. – Vol. 38. – P. 535 – 541.
5. Knauer U. A formula for the number of weak endomorphisms on paths / U. Knauer, N. Pipattanajinda. // Algebra and Discrete Mathematics. – 2018. – №2. – P. 270–279.
6. Zhuchok Yu. Endotypes of partial equivalence relations / Yu. Zhuchok, O. Toichkina // Semigroup Forum. – 2021. – Vol. 103, № 3. – P. 966-975.
7. Li W.-M. Green's relations on the strong endomorphism monoid of a graph / W.-M. Li // Semigroup Forum. – 1993. – Vol. 47. – P. 209 – 214.
8. Mashevitsky G. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup / G. Mashevitsky, B. M. Schein // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – Vol. 131, no. 6. – P. 1655 – 1660.

9. Расторгуєв Р. О. Використання спектральної теорії графів для розв'язання комбінаторних задач [Електронний ресурс] / Роман Олексійович Расторгуєв // КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО. – 2021.

10. Кузьменко І. М. Теорія графів [Електронний ресурс] / Ігор Миколайович Кузьменко // КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 2020.

11. Тоїчкіна О. О. Напівгрупи ендоморфізмів деяких класів бінарних відношень : дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.01.06 / Тоїчкіна Олена Олександрівна – Київ, 2018. – 130 с.

12. Araujo J. Dense relations are determined by their endomorphisms monoids / J. Araujo, J. Konieczny // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 70. – P. 302 – 306.

13. Böttcher M. Endomorphism spectra of graphs / M. Böttcher, U. Knauer // Discrete Math. – 1992. – Vol. 109. – P. 45 – 57.

14. Жучок Ю. В. Полугруппы эндоморфизмов некоторых свободных произведений / Ю. В. Жучок // Фундамент. и прикл. матем. – 2011 / 2012. – Т. 17, № 3. – С. 51 – 60.

15. Жучок Ю. В. Ендоморфізми відношень еквівалентності / Ю. В. Жучок // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 3 – С. 22 – 26.

16. Hou H. Endomorphism types of generalized polygons / H. Hou, X. Fan, Y. Luo // Southeast Asian Bull. Math. – 2009. – Vol. 33. – P. 433 – 441.

17. Fan S. H. Graphs whose strong endomorphism monoids are regular / S. H. Fan // Arch. Math. – 1999. – Vol. 73. – P. 419 – 421.

18. Romanenko E. The semigroup of endotopisms of the equivalence relation / E. Romanenko // International Mathematical Conference devoted to the

70th anniversary of V. V. Kirichenko : Abstracts. – Mykolaiv, 2012. – P. 170.

19. Бондарь Е. А. О регулярности некоторых подполугрупп моноида эндоморфизмов отношения эквивалентности / Е. А. Бондарь / Прикл. дискрет. матем. – 2014. – № 3(25). – С. 5 – 11.

20. Bondar, E.A., Zhuchok, Yu.V.: Representations of the strong endomorphism monoid of finite n -uniform hypergraphs. Fundam. Prikl. Mat. 18(1), 21–34 (2013) (in Russian; English translation J. Math. Sci. 201(4), 421–430 (2014)). <https://doi.org/10.1007/s10958-014-2001-1>.

21. Bondar, E.A., Zhuchok, Yu.V.: Semigroups of strong endomorphisms of infinite graphs and hypergraphs. Ukr. Mat. Zhurn. 65(6), 743–754 (2013) (in Russian; English translation Ukr. Math. J. 65(6), 823–834 (2013)). <https://doi.org/10.1007/s11253-013-0820-8>.

22. Fernandes, V.H., Jesus, M.M., Maltcev, V., Mitchell, J.D.: Endomorphisms of the semigroup of orderpreserving mappings. Semigroup Forum 81, 277–285 (2010). <https://doi.org/10.1007/s00233-010-9220-7>.

23. Knauer, U., Nieporte, M.: Endomorphisms of graphs I. The monoid of strong endomorphisms. Arch. Math. (Basel) 52(6), 607–614 (1989). <https://doi.org/10.1007/BF01237575>.

24. Schein, B.M., Teclezghi, B.: Endomorphisms of finite symmetric inverse semigroups. J. Algebra 128, 300–310 (1997). <https://doi.org/10.1006/jabr.1997.7132>.

25. Zhuchok, Yu.V.: Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free commutative dimonoid. Comm. Algebra 45(9), 3861–3871 (2017). <https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1248241>.

26. Zhuchok, Yu.V.: The monoid of endomorphisms of disconnected hypergraphs. Algebra Discrete Math. 16(1), 134–150 (2013).

Додатки



Міністерство освіти і науки України
 Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка
 Національний університет «Чернігівський колегіум» імені П.Т.Шевченка
 Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького
 Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
 Державний вищий навчальний заклад «Донбаський державний педагогічний
 університет» (м. Слов'янськ/м.Дніпро)
 Державний торговельно-економічний університет /Київський національний
 торговельно-економічний університет (м. Київ)
 Науково-дослідна лабораторія змісту і методів навчання математики, фізики,
 інформатики (СумДУ імені А.С.Макаренка)

МАТЕРІАЛИ

IV Всеукраїнської науково-методичної Інтернет-конференції
 студентів, аспірантів та молодих вчених
**«Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей
 учнів та студентів у процесі навчання
 дисциплін природничо-математичного циклу
 «ІПМ*плюс-2023»
 Форум молодих дослідників»**



17 листопада 2023 року
 м. Суми

Суворова А.	72
АКТИВІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНО-ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ 5-6 КЛАСІВ У ПРОЦЕСІ УСНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ	72
Суркова С.	74
ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ ПОНЯТТЯ ПРО ЧИСЛО ТА ЙОГО РОЗВИТОК	74
Тихонович Н.	76
ОСОБЛИВОСТІ ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТЬ З МАТЕМАТИКИ В ЛІТНІХ ШКОЛАХ ДЛЯ УЧНІВ РІЗНИХ ВІКОВИХ КАТЕГОРІЙ	76
Ткачевська А.	78
ПЕРЕВАГИ ВИКОРИСТАННЯ БАГАТЬОХ СПОСОБІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ	78
Черепіна О.	81
ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНЯМИ 5-6 КЛАСУ ЗАСОБАМИ ІСТОРІЇ НАУКИ	81
Шевченко М.	83
МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕТВОРЕНЬ	83
СЕКЦІЯ 2. ПРОБЛЕМИ СУЧАСНОЇ ФІЗИКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ ФІЗИКИ	85
Белошапка О., Дахова О., Недоступ В.	86
ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛА ПРИ ОБЧИСЛЕННІ ОПОРУ	86
Белошапка О., Недоступ В.	88
ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ	88
Вавринюк А.	90
МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМАЦІЇ МЕТАЛІВ	90
Волосенко А.	92
ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ФІЗИКИ У ФАХОВОМУ КОЛЕДЖІ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕХНОЛОГІЙ GOOGLE	92
Голишевська Д.	94
РЕАЛІЗАЦІЯ НАСКРІЗНОЇ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «ЕКОЛОПІЧНА БЕЗПЕКА ТА СТАЛИЙ РОЗВИТОК» В ОСВІТНЬОМУ ПРОЦЕСІ З ФІЗИКИ	94
Калініченко Д.	96
СТИМУЛЮВАННЯ ІНІЦІАТИВНОСТІ ТА ПІДПРИЄМЛИВОСТІ НА УРОКАХ ФІЗИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕРАКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ	96
Коротиш В., Бутолін К.	98
РЕКУРЕНТНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ ФОТОПОЛІМЕРИЗАЦІЇ	98
Моїсєєнко М.	100
ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ НА УРОКАХ ФІЗИКИ	100
Ольшанська А.	102
ТЕХНОЛОГІЇ STEM-ОСВІТИ ДЛЯ РОЗВИТКУ ТВОРЧОГО МИСЛЕННЯ ШКОЛЯРІВ В УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ	102
Сасенко О.	104
ФОРМУВАННЯ ЦІННІСНОГО СТАВЛЕННЯ УЧНІВ ДО ФІЗИЧНОГО ЗНАННЯ	104

М.С. Шевченко

Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Миргород
matiiia.shevchenko09072001@gmail.comНауковий керівник – Жучок Ю.В.,
доктор фізико-математичних наук, професор

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Графи мають різноманітні застосування в багатьох галузях науки, зокрема таких як теорія напівгруп, теорія мереж, криптографія, хімія, фізика, біологія, соціологія тощо. Важливими поняттями теорії графів, які на сьогодні досить активно використовуються, є поняття ендотипу та ендоспектру. Це певні числові характеристики, що надають спеціальну інформацію про властивості графів. Поняття ендотипу графа виявляється корисним при розв'язанні класичної задачі класифікації математичних об'єктів, а поняття ендоспектру – при дослідженні комбінаторних властивостей графів.

Нехай G і H — неорієнтовані графи. Гомоморфізм $f: G \rightarrow H$ є вершинним відображенням $V(G) \rightarrow V(H)$, яке зберігає суміжність, тобто таким, що для будь-якого $a, b \in V(G)$, $\{a, b\} \in E(G)$ означає, що $\{f(a), f(b)\} \in E(H)$. Гомоморфізм графа G у себе називається ендоморфізмом G .

Ендоморфізм $f: V(G) \rightarrow V(H)$ називається слабким ендоморфізмом, якщо f зберігає або стискає ребра, тобто якщо $f(x) = f(y)$ або $\{f(x), f(y)\} \in E(H)$ кожного разу, коли $\{x, y\} \in E(G)$. Позначається множина всіх слабких ендоморфізмів графа G через $WEnd(G)$.

Напівсильним називається ендоморфізм φ графа G , якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що існують $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$, $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$, такі, що $\{x', y'\} \in E$. Множина всіх напівсильних ендоморфізмів графа G позначається як $HEndG$.

Локально сильним називається ендоморфізм φ графа G , якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що кожному $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$ відповідає $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$, такий, що $\{x', y'\} \in E$, і навпаки, те саме виконується для кожного прообразу $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$. Множина всіх локально сильних ендоморфізмів позначається $LEndG$.

Квазісильним називається ендоморфізм φ графа G , якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що існує $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$ який являється суміжним прообразу $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$, і навпаки для кожного прообразу $y' \in y\varphi\varphi^{-1}$. Множина квазісильних ендоморфізмів графа G позначається $QEndG$.

Сильним ендоморфізмом графа G називається ендоморфізм φ , якщо з $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ випливає, що $\{x, y\} \in E$ для всіх $x, y \in V$. Множина всіх сильних ендоморфізмів утворює моноїд і позначається $SEndG$.

Автоморфізмом графа G називається підстановка φ множини V , якщо $\{x, y\} \in E$ лише в тому випадку, коли $\{x\varphi, y\varphi\} \in E$ для всіх $x, y \in V$. Множина всіх автоморфізмів відносно операції композиції утворює групу і позначається $AutG$.

Ендотипом бінарного відношення $\rho \subseteq X \times X$ відносно його ендоморфізмів [1] називається значення суми $Endotype(X, \rho) = \sum_{i=1}^5 s_i \cdot 2^{i-1}$, де s_i , $i \in \{1, \dots, 5\}$, приймають значення 0 або 1 та визначаються в такий спосіб: $s_i = 0$, і s якщо на i -тій позиції в послідовності вклучень $End(\rho) \supseteq HEnd(\rho) \supseteq LEnd(\rho) \supseteq QEnd(\rho) \supseteq SEnd(\rho) \supseteq Aut(\rho)$ множини збігаються, $s_i = 1$ в іншому випадку.

У роботі розглядається застосування методу класифікації графів за значенням їх ендотипу відносно ендоморфізмів на прикладі різних класів графів: часткові відношення еквівалентності, графи шляху, регулярні графи [2-4]. Досліджено класифікацію всіх відношень еквівалентності за значенням їх ендотипу відносно ендотопізмів, а також

розглянуто опис ендоспектру часткових еквівалентностей. Крім того, в якості узагальнення поняття ендоморфізму вивчаються слабкі ендоморфізми графів, характеризується кількість всіх слабких ендоморфізмів на скінченних шляхах [4].

Література

1. Böttcher M. *Endomorphism spectra of graphs* / M. Böttcher, U. Knauer // *Discrete Math.* – 1992. – Vol. 109. – P. 45 – 57.
2. Zhuchok Yu. *Endotypes of partial equivalence relations* / Yu. Zhuchok, O. Toichkina // *Semigroup Forum.* – 2021. – Vol. 103, № 3. – С. 966-975.
3. Pipattanajinda N. *The endotype of $(n - 3)$ -regular graphs of order n* / N. Pipattanajinda // *Southeast Asian Bull. Math.* – 2014. – Vol. 38. – P. 535 – 541.
4. Knauer U. *A formula for the number of weak endomorphisms on paths* / U. Knauer, N. Pipattanajinda. // *Algebra and Discrete Mathematics.* – 2018. – №2. – С. 270 – 279.

Анотація. Шевченко М. С. Методи дослідження графів за допомогою перетворень.

У роботі розглядається задача задачі класифікації графів за властивостями їх перетворень, які зберігають відношення суміжності вершин. Корисним при розв'язанні таких задач є поняття ендотипу графа, яке визначається за допомогою шести типів ендоморфізмів графа. Особлива увага приділяється методам класифікації графів за значеннями їх ендотипу відносно ендоморфізмів та ендотопізмів відповідно.

Ключові слова: граф, класифікація графів, перетворення, ендоморфізм, ендотопізм, автоморфізми, ендотип.